

DreaMsFida 2026

Soluzioni (a cura di Mattia G.)

Quesito 1. 1013

Chiaramente, possiamo scrivere

$$p(x) = 3(x-a)(x-b)(x-c)(x-d).$$

Osserviamo che, espandendo il prodotto ed usando il principio di identità dei polinomi

$$\begin{cases} 3abcd = 2, \\ -3(a+b+c+d)x^3 = -2026x^3. \end{cases}$$

Riscrivendo la somma richiesta come

$$S = \frac{d+c+b+a}{abcd}$$

otteniamo $S = \frac{2026/3}{2/3} = 1013$.

La risposta da fornire è dunque 1013.

Quesito 2. 7182

Il numero totale di pagine scritte per un medesimo argomento n , denotato con $P(n)$, è il prodotto tra il numero di tesisti e le pagine scritte da ognuno:

$$P(n) = n \cdot (2027 - n) = 2027n - n^2.$$

Il punto di massimo è l'ascissa del vertice, ossia

$$n_{max} = -\frac{b}{2a} = -\frac{2027}{2(-1)} = 1013,5.$$

Siccome n deve essere un numero intero, il massimo si ottiene per i valori interi più vicini ovvero $n = 1013$ oppure $n = 1014$. Per simmetria, quindi, il valore massimo è

$$P(1013) = 1013 \cdot (2027 - 1013) = 1013 \cdot 1014 = 1.027.182.$$

La risposta da fornire è dunque 7182.

Quesito 3. 5406

Procediamo inizialmente sommando le due espressioni per ottenere

$$(a+c) + b(a+c) = 4053,$$

ossia

$$(a+c)(1+b) = 4053.$$

Successivamente, sottraendo la seconda dalla prima, otteniamo

$$(a-c) - b(a-c) = 1,$$

ovvero

$$(a-c)(1-b) = 1.$$

Poiché a, b, c sono interi, dalla seconda equazione deduciamo che $(1-b)$ deve essere un divisore di 1, quindi $1-b=1$, da cui $b=0$, oppure $1-b=-1$, da cui $b=2$.

Se $b=0$, sostituendo nella prima equazione fattorizzata otteniamo $(a+c) = 4053$, dunque la somma della terna è $(a+c) + b = 4053 + 0 = 4053$.

Se $b=2$, otteniamo $3(a+c) = 4053$, da cui $a+c = 1351$ e la somma della terna risulta $a+c+b = 1351 + 2 = 1353$.

La risposta da fornire è dunque $4053 + 1353 = 5406$.

Quesito 4. 6661

Sia $l = 22$ cm la lunghezza del lato di base e $s = \sqrt{3842}$ cm la lunghezza dello spigolo laterale. L'altezza h delle piramidi è

$$h = \sqrt{s^2 - d^2} = \sqrt{3842 - 242} \text{ cm} = \sqrt{3600} \text{ cm} = 60 \text{ cm},$$

mentre l'apotema è

$$a = \sqrt{h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{60^2 + 11^2} \text{ cm} = \sqrt{3721} \text{ cm} = 61 \text{ cm}.$$

Il raggio r della sfera massima inscritta nell'ottaedro corrisponde all'altezza relativa all'ipotenusa del triangolo rettangolo di cateti h e $l/2$, ovvero

$$r = \frac{hl}{2a} = \frac{60 \cdot 11}{61} \text{ cm} = \frac{660}{61} \text{ cm}.$$

La risposta da fornire è dunque $660 + 61 = 0721$.

Quesito 5. 1201

Per risolvere il quesito, calcoliamo la probabilità dell'evento complementare, ovvero che nessuno dei $k = 4$ sieda vicino ad un altro in una fila di $n = 50$ posti. Il numero totale di modi in cui possono disporsi è dato da $4! \cdot \binom{n}{k} = 4! \cdot \binom{50}{4} = 4! \cdot \frac{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47}{4!}$. Il numero di modi in cui possono sedersi senza mai essere adiacenti si ottiene come $4! \cdot \binom{50-4+1}{4} = 4! \cdot \binom{47}{4} = 4! \cdot \frac{47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{4!}$. La probabilità che nessuno sia seduto vicino è, dunque,

$$P(\text{nessuno vicino}) = \frac{\binom{47}{4}}{\binom{50}{4}} = \frac{47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47} = \frac{46 \cdot 45 \cdot 44}{50 \cdot 49 \cdot 48} = \frac{759}{980},$$

La probabilità che almeno due siano seduti vicini è $1 - \frac{759}{980} = \frac{221}{980}$.

La risposta da fornire è dunque $221 + 980 = 1201$.

Quesito 6. 0732

Il termine generico dello sviluppo del trinomio elevato alla sesta potenza è

$$\frac{6!}{a!b!c!} \cdot (2x^2)^a \cdot (x)^b \cdot (1)^c$$

dove a, b, c sono interi non negativi tali che $a + b + c = 6$. Raggruppando i termini in x , otteniamo:

$$\frac{6!}{a!b!c!} \cdot 2^a \cdot x^{2a+b}$$

Cerchiamo il coefficiente di grado 7, quindi imponiamo la condizione sull'esponente

$$2a + b = 7.$$

Dobbiamo quindi trovare tutte le terne (a, b, c) che soddisfano il sistema

$$\begin{cases} 2a + b = 7, \\ a + b + c = 6, \\ a + b \leq 6. \end{cases}$$

Analizziamo gli unici possibili valori di a .

a = 3 Si ha $2(3) + b = 7$, da cui $b = 1$. Allora $c = 6 - 3 - 1 = 2$. Segue che il coefficiente è $\frac{6!}{3!1!2!} \cdot 2^3 = 60 \cdot 8 = 480$.

a = 2 Si ha $2(2) + b = 7$, da cui $b = 3$. Allora $c = 6 - 2 - 3 = 1$. Segue che il coefficiente è $\frac{6!}{2!3!1!} \cdot 2^2 = 60 \cdot 4 = 240$.

a = 1 Si ha $2(1) + b = 7$, da cui $b = 5$. Allora $c = 6 - 1 - 5 = 0$. Segue che il coefficiente è $\frac{6!}{1!5!0!} \cdot 2^1 = 6 \cdot 2 = 12$.

La risposta da fornire è dunque $480 + 240 + 12 = 732$.

Quesito 7. 0012

La lunghezza del segmento in funzione dell'angolo θ formato con la parete è

$$L(\theta) = \frac{a}{\sin \theta} + \frac{b}{\cos \theta}.$$

La lunghezza massima ammissibile corrisponde al valore minimo di questa funzione, che si ottiene annullando la derivata

$$L'(\theta) = -a \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} + b \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} = 0,$$

da cui $\tan^3 \theta = \frac{a}{b}$. Sostituendo i valori numerici si ottiene

$$\tan \theta = \sqrt[3]{\frac{2,7}{6,4}} = \sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{3}{4} = 0,75,$$

di conseguenza, $\sin \theta = 0,6$ e $\cos \theta = 0,8$. Sostituendo questi valori nella funzione originaria, otteniamo la lunghezza massima $L_{max} = \frac{2,7}{0,6} + \frac{6,4}{0,8} = 4,5 + 8,0 = 12,5$ metri.

La risposta da fornire è dunque 0012.

Quesito 8. 4188

Detta U la regione dello spazio occupata dalla torta, si tratta di calcolare

$$M = \int_U \sqrt{x^2 + y^2} d\mathcal{L}^3(x, y, z).$$

Utilizzando le coordinate cilindriche,

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{r^2 \cos 2\theta + 2} r^2 dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r^4 \cos 2\theta + 2r^2 \right) dr d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{5} \cos(2\theta) + \frac{2}{3} \right) d\theta = \frac{4}{3} \pi \approx 4,188\bar{6} \end{aligned}$$

Dovendo restituire la parte intera di $1000M$, segue la risposta 4188.

Quesito 9. 0005

Osserviamo, innanzitutto, che se x è pari, $\cos^2(\frac{x}{2}\pi) = 1$ e $\sin^2(\frac{x}{2}\pi) = 0$, dunque

$$f(x) = \frac{x}{2},$$

mentre se x è dispari, $\cos^2(\frac{x}{2}\pi) = 0$ e $\sin^2(\frac{x}{2}\pi) = 1$, dunque

$$f(x) = 3x + 1.$$

Partendo da $x = 17$, la sequenza inizia con

$$17 \rightarrow 52 \rightarrow 26 \rightarrow 13 \rightarrow 40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2$$

e entra nel ciclo periodico $(1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1)$ di lunghezza 3. Poiché $99 - 12 = 87$ è un multiplo di 3, avremo

$$g(17) = f^{87}(1) = 1.$$

Partendo da $x = 18$, la sequenza inizia con

$$18 \rightarrow 9 \rightarrow 28 \rightarrow 14 \rightarrow 7 \rightarrow 22 \rightarrow 11 \rightarrow 34 \rightarrow 17$$

e poi si ricongiunge alla sequenza iniziata con 17. Quindi $g(18) = f^{99}(18) = f^{91}(17) = f(1) = 4$.

La risposta da fornire è dunque 0005.

Quesito 10. 6000

Notiamo anzitutto che l'equazione è equivalente a

$$\sqrt[3]{7x-6} = \frac{x^3+6}{7}.$$

Riconosciamo che l'equazione è del tipo $f(x) = f^{-1}(x)$, con $f(x) = \frac{x^3+6}{7}$. A livello geometrico le soluzioni saranno ascisse della bisettrice del primo e terzo quadrante, quindi ci basta imporre

$$\frac{x^3+6}{7} = x,$$

da cui

$$x^3 - 7x + 6 = 0.$$

Una veloce applicazione del Teorema di Ruffini permette di riscrivere l'equazione come

$$(x-1)(x-2)(x+3) = 0.$$

La risposta da fornire è dunque 6000.

Quesito 11. 0850

Il punto $F(0, 3, 4)$ è uno dei due fuochi dell'ellisse per il Teorema di Dandelin. L'eccentricità è quindi data dal rapporto tra la distanza di F dall'asse z e la sua distanza da V , ossia

$$e = \frac{3}{5} = 0.6.$$

Nel piano yz , la retta del piano dell'orbita deve essere tale che il raggio della sfera sia perpendicolare alla retta stessa. Dalla condizione di tangenza alla sfera, la retta passante per F è data da

$$3y + 4z = 3(3) + 4(4) = 9 + 16 = 25.$$

Le generatrici del cono nel piano yz sono $z = y$ e $z = -y$, quindi i vertici che ci interessano dell'ellisse sono $(0, \frac{25}{7}, \frac{25}{7})$ e $(0, -25, 25)$. La lunghezza dell'asse maggiore è quindi

$$2a = \sqrt{\left(\frac{25}{7} + 25\right)^2 + \left(\frac{25}{7} - 25\right)^2} = \frac{250}{7}$$

La risposta da fornire è dunque 0850.

Quesito 12. 8104

Innanzitutto, la fattorizzazione in numeri primi di 2026 è $2 \cdot 1013$, quindi

$$D = \{1, 2, 1013, 2026\}.$$

Chiamiamo Q un insieme verificante la condizione del problema, ossia

$$\sum_{d \in Q} d \equiv 0 \pmod{d_j} \quad \forall d_j \in Q$$

Sia $\sigma(Q)$ la somma degli elementi di Q e sia $m = \text{m.c.m.}(Q)$. La condizione è equivalente a

$$\sigma(Q) \equiv 0 \pmod{m}.$$

Analizziamo tutti i possibili sottoinsiemi Q in base alla loro cardinalità k .

k	Sottoinsieme Q	Somma S	mcm(Q)	Divisibilità	Esito
1	{1}	1	1	1 1	Sì
	{2}	2	2	2 2	Sì
	{1013}	1013	1013	1013 1013	Sì
	{2026}	2026	2026	2026 2026	Sì
2	{1, 2}	3	2	2 † 3	No
	{1, 1013}	1014	1013	1013 † 1014	No
	{1, 2026}	2027	2026	2026 † 2027	No
	{2, 1013}	1015	2026	2026 † 1015	No
	{2, 2026}	2028	2026	2026 † 2028	No
	{1013, 2026}	3039	2026	2026 † 3039	No
3	{1, 2, 1013}	1016	2026	2026 † 1016	No
	{1, 2, 2026}	2029	2026	2026 † 2029	No
	{1, 1013, 2026}	3040	2026	2026 † 3040	No
	{2, 1013, 2026}	3041	2026	2026 † 3041	No
4	{1, 2, 1013, 2026}	3042	2026	2026 † 3042	No

La risposta da fornire è dunque $4 \cdot 2026 = 8104$.

Quesito 13. 0002

Analizziamo, cogliendo il suggerimento nascosto nel nome del cavaliere, lo sviluppo di Taylor di $H(x)$ in $x_0 = 1$. Poiché $H(1) = 1$, procediamo con la derivazione implicita di $\ln(H) = H \ln x$. Derivando una prima volta si ottiene

$$\frac{H'}{H} = H' \ln x + \frac{H}{x},$$

che in $x = 1$ fornisce $H'(1) = 1$. Derivando ulteriormente l'espressione si ottiene

$$\frac{H''H - (H')^2}{H^2} = H'' \ln x + \frac{H'}{x} + \frac{H'x - H}{x^2}$$

e si ricava $H''(1) - 1 = 1$, da cui $H''(1) = 2$.

Ne consegue che lo sviluppo di Taylor al secondo ordine è

$$H(x) = 1 + (x - 1) + (x - 1)^2 + o((x - 1)^2).$$

Sostituendo tale espressione nel limite, i termini costanti e lineari si cancellano, lasciando

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)^2}{(x - 1)^2} = 1.$$

La risposta da fornire è quindi 0002.

Quesito 14. 0100

In un opportuno sistema di riferimento, il primo spostamento, di 80 cm, avviene lungo l'asse x , il secondo, di 40 cm, lungo l'asse y ed il terzo, di 20 cm, nuovamente la direzione dell'asse x . Vista la geometria del problema, la distanza percorsa lungo l'asse x deve coincidere con la lunghezza del lato L del quadrato, pertanto $L = 80 \text{ cm} + 20 \text{ cm} = 100 \text{ cm}$.

La risposta da fornire è dunque 0100.

Quesito 15. 0365

Notiamo che $M_n = S^n$, con

$$S = A + A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2I + J,$$

dove

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e $J^2 = I$. Poiché I e J commutano, applichiamo la formula del binomio di Newton matriciale, ottenendo

$$M_6 = (2I + J)^6 = \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} (2I)^{6-k} J^k.$$

Considerando che l'elemento $(1, 1)$ di J^k è 1 se k è pari e 0 se k è dispari, otteniamo

$$\begin{aligned} (M_6)_{1,1} &= \sum_{k \in \{0,2,4,6\}} \binom{6}{k} 2^{6-k} = \binom{6}{0} 2^6 + \binom{6}{2} 2^4 + \binom{6}{4} 2^2 + \binom{6}{6} 2^0 = \\ &= 64 + 15 \cdot 16 + 15 \cdot 4 + 1 = 64 + 240 + 60 + 1 = 365. \end{aligned}$$

La risposta da fornire è dunque 0365.

Quesito 16. 0365

Ogni caffè C ha 3 opzioni indipendenti, per un totale di $2^3 = 8$ tipologie possibili. Il numero di modi in cui le tre varianti appaiono almeno una volta su tre caffè scelti tra le 8 tipologie è dato da

$$N = \sum_{k=0}^3 (-1)^k \binom{3}{k} (2^{3-k})^3 = 8^3 - 3 \cdot 4^3 + 3 \cdot 2^3 - 1^3 = 512 - 192 + 24 - 1 = 343.$$

Calcoliamo la probabilità che almeno due clienti abbiano ordinato esattamente C . I casi favorevoli sono i seguenti:

1. tutti e tre hanno ordinato C , che accade in 1 modo,
2. esattamente due hanno ordinato C e il terzo un caffè diverso, che accade in $\binom{3}{2} \cdot (8-1) = 3 \cdot 7 = 21$ modi,

Il numero totale di casi favorevoli è quindi $1 + 21 = 22$. La probabilità richiesta è, pertanto, $P = \frac{22}{343}$, frazione già ridotta ai minimi termini.

La risposta da fornire è dunque 0365.

Quesito 17. 0364

Innanzitutto, dato un numero primo p ed un intero m , sia $v_p(m)$, la valutazione p -adica di m , ossia l'esponente della più alta potenza di p che divide m . Per il Teorema di Legendre,

$$v_p(n!) = \frac{n - s_p(n)}{p-1}$$

dove $s_p(n)$ è la somma delle cifre di n in base p .

Cerchiamo gli interi $n \in [1, 500]$ tali che

$$v_3(n!) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor,$$

ossia

$$\frac{n - s_3(n)}{2} \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor.$$

Se $n = 2k$,

$$k - \frac{s_3(n)}{2} \geq k$$

che implica $s_3(n) \leq 0$, impossibile per $n \geq 1$. Se $n = 2k + 1$,

$$\frac{2k + 1 - s_3(n)}{2} \geq k,$$

ovvero $s_3(n) \leq 1$. Poiché $n \geq 1$ deve essere $s_3(n) = 1$, che accade se e solo se n è una potenza di 3. Nell'intervallo $[1, 500]$, le suddette potenze di 3 sono

$$1, 3^1, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5.$$

La risposta da fornire è dunque 0364.

Quesito 18. 1280

Il numero totale di esagrammi distinti è dato dalle disposizioni con ripetizione di due elementi in 6 posti, ovvero $2^6 = 64$. Per ogni esagramma fissato, un esagramma in risonanza deve differire esattamente in tre linee e ci sono

$$\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$$

modi per scegliere quali 3 linee cambiare su 6. Poiché le coppie devono essere ordinate, dobbiamo moltiplicare il numero totale di possibili primi esagrammi per il numero di compagni validi per ciascuno di essi, ottenendo $64 \cdot 20 = 1280$.

La risposta da fornire è dunque 1280.

Quesito 19. 0157

Ricordiamo che, in generale, come conseguenza delle formule di Werner e del Teorema dei residui,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax) \sin(bx)}{x^2} dx = \frac{\pi}{2} \min\{a, b\},$$

quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x) \sin(x/2)}{x \cdot x/2} dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x) \sin(x/2)}{x^2} dx = 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} \approx 1,57075.$$

La risposta da fornire è dunque 0157.

Quesito 20. 0250

Indichiamo con \mathcal{C} l'insieme di Cantor aleatorio e con p la probabilità che esca testa. L'insieme \mathcal{C} può essere vuoto se si verifica uno dei seguenti eventi:

- Né $[0, \frac{1}{3}]$ né $[\frac{2}{3}, 1]$ vengono mantenuti nella costruzione.
- Esattamente uno tra $[0, \frac{1}{3}]$ e $[\frac{2}{3}, 1]$ viene mantenuto nella costruzione, ma poi \mathcal{C} diventa vuoto.
- Sia $[0, \frac{1}{3}]$ sia $[\frac{2}{3}, 1]$ vengono mantenuti nella costruzione, ma poi \mathcal{C} diventa vuoto.

I tre eventi (indichiamoli rispettivamente con A_1, A_2, A_3) sono disgiunti e, per autosimilarità di \mathcal{C} , le loro probabilità sono date da

$$\mathbb{P}(A_1) = (1-p)^2, \quad \mathbb{P}(A_2) = 2p(1-p)\mathbb{P}(\mathcal{C} = \emptyset), \quad \mathbb{P}(A_3) = p^2\mathbb{P}(\mathcal{C} = \emptyset)^2.$$

Quindi $x = \mathbb{P}(\mathcal{C} = \emptyset)$ è soluzione di

$$x = p^2x^2 + 2p(1-p)x + (1-p)^2.$$

Le relative radici sono 1 e $(\frac{1-p}{p})^2$. Dato che $\mathbb{P}(\mathcal{C} = \emptyset)$ deve tendere a 0 per $p \rightarrow 1$ e $p = \frac{2}{3}$, la soluzione ammissibile è la seconda, ossia $\frac{1}{4}$.

La risposta da fornire è dunque 0250.

Quesito 21. 4030

Usando l'identità dei prodotti tra interi di Eisenstein, detta ω è una radice terza dell'unità,

$$a - \omega b = (12 - \omega)(13 - \omega) \quad \text{oppure} \quad a - \omega b = (12 - \omega)(13 - \omega^2).$$

Si ottengono (155, 26) e (169, 1). La coppia che massimizza la somma richiesta è (155, 26).

La risposta da fornire è dunque 4030.