

Allenamenti di Matematica

Problemi di Logica, Probabilità e Combinatoria

1. Cinque amici hanno 6, 7, 8, 9, 10 anni; qual è la probabilità che scelti due di essi a caso la differenza delle loro età sia almeno 2 anni? Si supponga che le scelte siano equiprobabili ed indipendenti l'una dall'altra.
2. La famiglia Petersen ha 4 figli. Il più giovane è un maschio, così come almeno uno degli altri 3. Qual è la probabilità che il figlio più vecchio sia una femmina?
3. Una gara di matematica è composta da 10 domande a risposta multipla, ciascuna con quattro possibili risposte contrassegnate dalle lettere A , B , C e D (per ogni domanda vi è una e una sola risposta corretta). Carlo viene a sapere che la lista delle risposte corrette contiene tre lettere A , tre lettere B , due lettere C e due lettere D . Qual è la probabilità che Carlo, scegliendo a caso una lista che abbia questa caratteristica, risponda correttamente a tutte le domande?
 - (A) $\frac{1}{26500}$
 - (B) $\frac{1}{25200}$
 - (C) $\frac{1}{24600}$
 - (D) $\frac{1}{21200}$
 - (E) $\frac{1}{20800}$
4. Nicola e Gianmarco hanno una scatola con dentro 24 carte, di cui 22 nere e 2 rosse. Nicola punta su un numero n tra 1 e 24, dopo di che Gianmarco inizia a pescare n carte, sfogliandole una ad una. Nicola vince se la carta numero n è la prima carta rossa che esce. Su quale numero gli conviene puntare per avere la massima probabilità di vittoria?
5. Sono date n cifre, nessuna delle quali 0, generate in modo casuale e indipendente. Trovare la probabilità che il loro prodotto sia divisibile per 10.
6. Si scelgano a caso tre vertici di un poligono regolare di $2n + 1$ lati. Trovare la probabilità che il centro del poligono si trovi dentro il triangolo risultante.
7. Se si scelgono sequenzialmente a caso sei punti sulla circonferenza di un cerchio, qual è la probabilità che il triangolo formato dai primi tre sia disgiunto da quello formato dai tre successivi?

8. a_1, a_2, \dots, a_n è una successione arbitraria di interi positivi. Si prende a caso un elemento della successione. Il suo valore è a . Si prende a caso un altro elemento, indipendentemente dal primo. Il suo valore è b . Poi un terzo, di valore c . Dimostrare che la probabilità che $a + b + c$ sia divisibile per 3 è almeno $\frac{1}{4}$.
9. Si lancia ripetutamente un dado. A vince se esce 1 o 2 in due lanci consecutivi, B vince se esce 3, 4, 5 o 6 in due lanci consecutivi. Trovare la probabilità di vittoria di ciascun giocatore se il dado è lanciato al più 5 volte.
10. $3n$ studenti sono seduti in 3 file da n . Gli studenti se ne vanno uno alla volta. Tutti gli ordini in cui se ne vanno sono equiprobabili. Trovare la probabilità che non ci siano mai due file in cui il numero degli studenti rimanenti differisce di due o più studenti.
11. Nell'isola dei furfanti e dei cavalieri, gli abitanti si dividono in due categorie: i furfanti che mentono sempre, e i cavalieri che dicono sempre la verità. Quando furono annunciate le elezioni presidenziali c'erano $n \geq 3$ candidati, tutti autoctoni. Durante un dibattito televisivo tutti i candidati, a turno, si presentarono. Il k -esimo candidato disse: "Tra tutti i candidati, me escluso, ci sono k furfanti più che cavalieri". Quanti candidati c'erano?
12. Cinque animali (A , B , C , D ed E) sono o cani o lupi. I cani dicono sempre la verità, mentre i lupi mentono sempre. A dice che B è un cane. C dice che D è un lupo. E dice che A è un cane. B dice che C è un lupo. D dice che B ed E sono animali diversi. Quanti lupi ci sono nel gruppo dei cinque animali?
13. Una stanza rettangolare ha le pareti rivolte nelle direzioni dei quattro punti cardinali e ci sono quattro porte d'accesso. Tre persone si trovano nella stanza e fanno le seguenti affermazioni. Prima persona: "Non ci sono porte sulla parete Sud". Seconda persona: "Ci sono porte solo sulla parete Nord". Terza persona: "Su ogni parete c'è al massimo una porta". Che cosa si può dire per certo delle affermazioni fatte?
- (A) L'affermazione fatta dalla prima persona è vera,
 (B) l'affermazione fatta dalla seconda persona è vera,
 (C) l'affermazione fatta dalla terza persona è vera,
 (D) almeno una affermazione è falsa,
 (E) non si può dire niente di certo sulle affermazioni fatte.
14. Quattro bambine, Alice, Bianca, Cecilia e Daniela, decidono di comprare un palloncino a testa da un venditore che ha solo palloncini rossi e blu. Compreranno il palloncino una dopo l'altra: prima Alice, poi Bianca, poi Cecilia e infine Daniela. Bianca dice: "Se Alice lo comprerà rosso, anch'io lo comprerò rosso". Cecilia dice: "Io lo comprerò dello stesso colore di Bianca". Daniela dice: "Se Alice lo comprerà blu, io lo comprerò dello stesso colore di Cecilia". Quale delle seguenti affermazioni è sicuramente vera?

- (A) È impossibile che quattro bambine comprino un palloncino rosso,
 (B) almeno tre bambine compreranno un palloncino dello stesso colore,
 (C) Daniela e Bianca compreranno un palloncino dello stesso colore,
 (D) almeno due bambine compreranno un palloncino rosso,
 (E) nessuna delle precedenti affermazioni è sicuramente vera.
15. Andrea e Alberto sono gemelli e si assomigliano in tutto tranne in una cosa: uno di loro è bugiardo di lunedì, martedì e mercoledì, mentre l'altro mente di giovedì, venerdì e sabato. Negli altri giorni sono sinceri. Un certo giorno uno dice: "Io sabato dico bugie, e anche domenica". L'altro risponde: "Domani dirò bugie". In che giorno si è svolto il dialogo?
16. Tra la popolazione dell'arcipelago del Disaccordo esistono solo due cognomi: Delvero e Delfalso. Una tradizione ancestrale vuole che un Delvero non menta mai, mentre un Delfalso non dice mai la verità. Un navigatore fa un naufragio sull'arcipelago e incontra tre giovani indigeni. Conoscendo la particolarità dell'isola, chiede ai suoi interlocutori i loro cognomi. Ecco le risposte che ottiene:
 Eric: "Gli altri due si chiamano Delfalso"
 Maria: "Due di noi si chiamano Delfalso"
 Stefano: "Solo uno di noi si chiama Delfalso"
 Quali sono i cognomi delle persone incontrate nel naufragio?
17. Un viaggiatore si trova sull'arcipelago del Disaccordo per andare ad una riunione nella più grande città del luogo. Purtroppo ha ricevuto solo indicazioni sommarie, e trovandosi davanti ad un bivio inaspettato non sa quale delle due direzioni prendere. La città dove si deve dirigere è per fortuna molto famosa, e tutti gli abitanti dell'arcipelago sanno dove si trova. Arrivano allora da due direzioni opposte due abitanti del luogo. Il nostro viaggiatore conosce le abitudini dell'arcipelago del Disaccordo e sa che uno di essi (ma non sa quale) è un Delvero e l'altro un Delfalso. Le leggi dell'arcipelago sono molto severe nei confronti dei viaggiatori, ed è scritto che, per ottenere un'informazione, si può porre una sola domanda, ad una sola persona. Cosa dovrà quindi chiedere il nostro amico viaggiatore?
18. **Si gioca a Tennis.** In un torneo di tennis, solo i vincitori di ogni incontro giocano quello successivo; così fino alla proclamazione del vincitore del torneo.
 Se i giocatori sono 128, quanti incontri devono essere giocati in tutto per proclamare il vincitore del torneo?
19. **Casalinghe confuse.** Tre paia di calzini, uno rosso, uno blu e uno verde, sono stesi in fila. Sapendo che due calzini dello stesso colore non sono vicini l'uno all'altro, quante successioni di colori si possono avere?
20. **Scrivi scrivi...** Su una striscia molto lunga sono scritte di seguito, in ordine alfabetico, tutte le parole di 4 lettere (incluse quelle prive di significato) ottenibili con le 21 lettere del nostro alfabeto a partire da AAAA. Qual è la 2005-esima lettera scritta?

21. **La sala consigliare di Matelandia.** La sala consigliare della città di Matelandia è molto piccola: ci stanno solamente 10 seggiole contro i muri di tre lati della stanza (l'ingresso sul quarto lato) e un tavolo al centro. All'inizio di ogni riunione il sindaco entra per primo e i nove consiglieri entrano rigorosamente in ordine di età: dal più anziano al più giovane. Il sindaco sceglie dove sedersi, mentre ciascuno dei consiglieri, a causa delle ristrettezze del luogo, deve sedersi accanto a qualcuno che si è già sistemato. In quanti modi diversi può disporsi il consiglio?
22. **Consiglieri... maldisposti.** Proprio oggi è in corso il consiglio di amministrazione della principale banca della città, convocato d'urgenza a causa del furto subito la notte scorsa. I sei consiglieri arrivano trafelati alla riunione e si siedono a caso ai sei posti della tavola rotonda che troneggia al centro della sala riunioni. Ognuno dei sei consiglieri ha davanti a sé il segnaposto (mobile) che avrebbe dovuto indicargli dove sedersi. Visto il momento critico, decidono di restare tutti seduti al loro posto e di scambiarsi il segnaposto solo se due consiglieri seduti vicino hanno ciascuno il segnaposto dell'altro. Quante possono essere le diverse possibili distribuzioni dei segnaposto al termine di tutti gli scambi?
(Due distribuzioni di segnaposto che differiscono per una rotazione o per una qualsiasi trasformazione di simmetria del tavolo sono da considerarsi distinte.)
23. **Su due ruote.** Ad una gara a punti su pista partecipano nove concorrenti. Ad ogni traguardo intermedio vengono assegnati 9 punti al primo, 8 al secondo, 7 al terzo e così via fino ad assegnare 1 punto all'ultimo. Prima dell'ultimo sprint (in cui il punteggio vale doppio) la classifica vede al comando Abdujaparov con 2 punti di vantaggio su Boardman e 9 su Cipollini. Gli altri concorrenti hanno un distacco in punti tale da non consentire più loro di aggiudicarsi la gara.
Quanti sono i possibili diversi piazzamenti dei tre corridori nell'ultimo sprint che permettono a Cipollini di vincere la gara?
24. **Insiemi colorati.** Siano A_1, A_2, \dots, A_{n+1} insiemi aventi ciascuno n elementi, tali che ogni coppia di insiemi abbia esattamente un elemento in comune e che ogni elemento dell'unione appartenga ad esattamente due insiemi. Per quali valori di n è possibile colorare con due colori gli elementi dell'unione in modo che ogni insieme possieda un ugual numero di elementi dei due colori?
25. **Cubi e triangoli.** Dato un cubo C , quanti sono i triangoli che hanno per vertici tre vertici di C e che non giacciono su nessuna delle facce di C ?
26. **Per distinguere.** Le nuove targhe automobilistiche sono costituite da due lettere, tre cifre e altre due lettere (scelte nell'alfabeto inglese di 26 lettere). Quante targhe al massimo si possono emettere se si vuole che due qualsiasi di esse differiscano in almeno due posizioni?