Calcolo Combinatorio e Probabilità

Andrea Galasso

1 Calcolo Combinatorio

Definizione 1. Fissati $n, k \in \mathbb{N}$, con $k \leq n$, indicheremo con

$$D_{n,k} := \frac{n!}{(n-k)!}$$

le disposizioni di n oggetti in k posti e con $DR_{n,k} := n^k$ le disposizioni con ripetizione di n oggetti in k posti. Infine, siano

$$C_{n,k} := \binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

le combinazioni di n oggetti in k posti. Ricordiamo che useremo le disposizioni se per risolvere l'esercizio è rilevante l'ordine degli n elementi, se non lo è useremo le combinazioni. Infine, gli anagrammi di una parola di n lettere di cui un'unica lettera si ripete h volte sono

$$\frac{n!}{h!}\,.$$

Esercizio 1.1. *Quante parole di tre lettere si possono formare usando a, b, c, d, eventualmente ripetendole, che non finiscano per d?*

Svolgimento: Tutte le possibili parole di tre lettere che si possono formare utilizzando $\{a, b, c, d\}$ sono

$$DR_{4,3} = 4^3 = 64\,.$$

Il numero di parole di tre lettere che finiscono per d, i.e. $\boxed{}\boxed{}\boxed{d}$, sono il numero delle disposizioni di due lettere nei due spazi rimanenti,

$$DR_{4,2} = 4^2 = 16\,,$$

da cui il risulato si ottiene sottraendo al numero di parole possibili quelle che finiscono per d, cioè $64 - 16 = 48$. □

Esercizio 1.2. *Calcolare quanti sono i numeri di 4 cifre, tutte fra loro diverse, divisibili per cinque.*

Svolgimento: Un numero di quattro cifre è divisibile per cinque se della forma $\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{0}$ o $\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{5}$. La quantità di possibili numeri di quattro cifre non ripetute che finiscono per zero è semplicemente la disposizione delle nove cifre $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ nei tre spazi rimanenti, cioè

$$D_{9,3} = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504\,.$$

Per calcolare invece numeri del tipo $\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{5}$ occorre prestare attenzione perché nella prima cifra a sinistra non può esserci lo zero. Quindi dobbiamo suddividere ulteriormente in tre casi: $\boxed{\ }\boxed{0}\boxed{\ }\boxed{5}$, $\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{0}\boxed{5}$ e $\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{5}$, dove non è ammesso che compaiano zeri negli spazi vuoti. La quantità di numeri del tipo $\boxed{\ }\boxed{0}\boxed{\ }\boxed{5}$ è data dalle disposizioni delle 8 cifre $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$ nelle 2 caselle vuote, si ha quindi

$$D_{8,2} = 56$$

e, in modo analogo, ci saranno 56 numeri della forma $\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{0}\boxed{5}$. L'ultima eventualità è data dalle disposizioni delle otto cifre $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$ nei tre spazi vuoti, i.e. $D_{8,3}$. Concludendo, in modo schematico si ha:

$$\begin{aligned} &\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{0} + \boxed{\ }\boxed{0}\boxed{\ }\boxed{5} + \boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{0}\boxed{5} + \boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{5} \\ &= 504 + 56 + 56 + 336 = 952\,. \end{aligned}$$

□

Esercizio 1.3. *Quante parole di tre lettere si possono formare usando $\{a, b, c, d\}$ che abbiano esattamente due b?*

Svolgimento: Una parola che abbia esattamente due b è un anagramma di $\boxed{b}\boxed{b}\boxed{x}$, dove x è una lettera scelta tra $\{a, c, d\}$. Quindi il numero cercato è dato dai possibili anagrammi della parola $\boxed{b}\boxed{b}\boxed{x}$ moltiplicato per il numero delle possibili scelte di x, che sono 3. Per cui la soluzione è

$$\frac{3!}{2!} \cdot 3 = 9\,.$$

□

Esercizio 1.4. *Da un mazzo di 52 carte ne vengono estratte 5 con reinserimento nel mazzo. Quante sono tutte le possibili estrazioni ordinate per le quali almeno due carte estratte sono uguali.*

Svolgimento: Tutte le possibili estrazioni ordinate con reinserimento sono:

$$DR_{52,5} = 52^5\,,$$

a cui vanno sottratte le disposizioni di carte tutte diverse, che sono

$$D_{52,5} = \frac{52!}{47!}\,,$$

e quindi la soluzione è
$$52^5 - \frac{52!}{47!}\,.$$
$\square$

Esercizio 1.5. *In quanti modi si possono assegnare 3 caramelle diverse fra sei bambini, in modo che ogni bambino riceva al più una caramella.*

Svolgimento: È sbagliato pensare che la soluzione sia data da $D_{n,k} := D_{3,6}$ in quanto dev'essere $k \leq n$. Ragioniamo allora nel modo seguente: supponiamo di associare ad ogni bambino una casella, se essa contiene la lettera x allora il bambino non riceverà alcuna caramella, se invece la casella contiene una tra le lettere $\{a, b, c\}$ allora il bambino corrispondente a quella casella riceverà una caramella. Ad esempio la sequenza $\boxed{a \mid b \mid x \mid x \mid c \mid x}$ significa che il primo, il secondo e il quinto bambino hanno ricevuto una caramella, gli altri no. Quindi è chiaro che la soluzione sarà data dagli anagrammi della parola $\boxed{a \mid b \mid x \mid x \mid c \mid x}$, che sono
$$\frac{6!}{3!} = 120\,.$$
$\square$

Esercizio 1.6. *Determinare il numero complessivo di incontri in un torneo di scacchi con* 8 *giocatori, sapendo che devono incontrarsi tutti tra loro.*

Svolgimento: La soluzione è data dal numero di coppie che si possono formare con 8 persone, poichè ad ogni coppia corrisponde un incontro, quindi si ha
$$C_{8,2} = \frac{8!}{2!6!} = 28\,.$$
$\square$

2 Probabilità

Definizione 2. Dato uno spazio di probabilità finito (Ω, p). Siano $A, B \subseteq \Omega$, indicheremo con $A^c = \Omega \backslash A$. Ricordiamo che la funzione $p : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ soddisfa le seguenti proprietà:

- $p(\Omega) = 1$ e $p(\emptyset) = 0$
- $p(A^c) = 1 - p(A)$
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Parleremo sempre di probabilità a priori:
$$p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{“Numero di casi favorevoli”}}{\text{“Numero di casi possibili”}}\,.$$

Ricordiamo che da un punto di vista pratico i connettivi logici "o" ed "e" corrispondono rispettivamente alle operazioni insiemistiche "$\cup$" ed "$\cap$", la negazione "non" corrisponde al complementare di un insieme, capiremo meglio svolgendo gli esercizi il senso di tutto ciò.

Proposizione 2.1. *Sia $A \subseteq \Omega$. Si ha che la probabilità di ottenere k volte un esito A in n prove ripetute è data da*

$$P(\text{“}k \text{ volte } A\text{”}) = \binom{n}{k} p(A)^k p(A^c)^{n-k} \,.$$

Esercizio 2.1. *In una stanza ci sono 8 coppie sposate. Vengono portate fuori dalla stanza 6 persone a caso. Calcolare la probabilità che siano state portate fuori 3 coppie di sposi.*

Svolgimento: Il numero di casi favorevoli corrisponde al numero di possibili terne costituibili con 8 coppie, una terna è composta da tre coppie, e quindi

$$\text{“Numero di casi favorevoli”} = C_{8,3} = 56 \,.$$

Il numero di casi possibili è dato dal numero delle sestine componibili con 16 persone, cioè $C_{16,6} = 13 \cdot 11 \cdot 8 \cdot 7$, e quindi

$$P(\text{“Estrarre 3 coppie di sposi”}) = \frac{1}{143} \,.$$

$\square$

Esercizio 2.2. *Si estraggono 3 carte dalle 13 di quadri senza reinserimento. Calcolare la probabilità che la seconda estratta sia l'asso di quadri.*

Svolgimento: Le possibili estrazioni ordinate di tre carte tra 13 sono $D_{13,3}$. Un'estrazione favorevole è del tipo $\boxed{\;x\;|\;A\;|\;y\;}$, dove x e y denotano due delle rimanenti 12 carte. Quindi il numero delle estrazioni favorevoli è dato dalle disposizioni delle 12 carte di quadri, asso escluso, nei due spazi rimanenti, i.e. $D_{12,2}$. E quindi

$$P(\boxed{\;x\;|\;A\;|\;y\;}) = \frac{D_{12,2}}{D_{13,3}} \,.$$

$\square$

Esercizio 2.3. *Una scatola contiene 18 cioccolatini, 8 fondenti e 10 al latte. Calcolare la probabilità che*

- *3 cioccolatini estratti senza reimmissione dalla scatola siano tutti fondenti,*
- *3 cioccolatini estratti senza reimmissione siano, nell'ordine, 2 al latte e uno fondente*
- *e che, estraendo con reimmissione, i cioccolatini escano 2 al latte e uno fondente.*

Svolgimento: La prima richiesta consiste nel calcolare tutte le possibili combinazioni di 3 cioccolatini fondenti tra 8. Quindi si ha che

$$P(\text{“Estrarre 3 cioccolatini fondenti”}) = \frac{C_{8,3}}{C_{18,3}}\,.$$

Per la seconda richiesta è importante l'ordine di estrazione, per cui si useranno le disposizioni:

$$P(\boxed{\;L\;|\;L\;|\;F\;}) = \frac{D_{10,2} \cdot D_{8,1}}{D_{18,3}}\,,$$

dove L e F stanno rispettivamente per cioccolatino al latte e per cioccolatino fondente. Infine, per poter rispondere all'ultima richiesta, notiamo che siamo proprio nella situazione esposta nella **Proposizione 2.1**. Poniamo $p(L) = 10/18 = 5/9$ e $p(F) = 8/18 = 4/9$. Si ha

$$P(\text{“Esce 2 volte } L\text{”}) = \binom{3}{2} p(L)^2 p(F)^{3-2} = \frac{3!}{2!1!}\left(\frac{5}{9}\right)^2\left(\frac{4}{9}\right)\,.$$

□

Esercizio 2.4. *Vengono lanciati tre dadi in sequenza. Qual è la probabilità che le facce uscite non siano tutte uguali?*

Svolgimento: Si ha che

$$P(\text{“Facce non tutte uguali”}) = 1 - P(\text{“Facce tutte uguali”})\,.$$

Per calcolare la probabilità che le facce escano tutte uguali è sufficiente notare che le “sequenze favorevoli” sono del tipo $\boxed{1\;|\;1\;|\;1}$, $\boxed{2\;|\;2\;|\;2}$, ... $\boxed{6\;|\;6\;|\;6}$. Le uscite possibili sono invece $DR_{6,3}$, quindi

$$P(\text{“Facce non tutte uguali”}) = 1 - P(\text{“Facce tutte uguali”}) = 1 - \frac{6}{6^3} = \frac{35}{36}\,.$$

□

Esercizio 2.5. *Dei componenti adulti di una certa popolazione, esattamente il* 40% *va spesso al cinema e esattamente il* 30% *va spesso a teatro. Il* 60% *soddisfa almeno una delle due caratteristiche. Determinare la probabilità che un componente adulto della popolazione data vada spesso al cinema e vada spesso a teatro.*

Svolgimento: Per risolvere l'esercizio dobbiamo utilizzare la formula enunciata nella **Definizione 2**:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)\,,$$

dove A e B corrispondono rispettivamente agli insiemi di coloro che vanno spesso al cinema e coloro che vanno spesso a teatro. E quindi, semplicemente si ha

$$P(A \cap B) = \frac{40}{100} + \frac{30}{100} - \frac{60}{100} = \frac{1}{10}\,.$$

□

Definizione 3. Sia (Ω, p) uno spazio di probabilità finito e siano $A, B \subseteq \Omega$, con $p(B) \neq 0$. Chiamaremo probabilità condizionata di A dato B la probabilità:

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}\,.$$

Proposizione 2.2. *Sia (Ω, p) uno spazio di probabilità finito e sia $\{B_1, \ldots, B_n\}$ una partizione di Ω, con $p(B_i) > 0$ per ogni $i \in \{1, \ldots n\}$. Allora dato $A \subsetneqq \Omega$ si ha*

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n)\,.$$

Teorema 2.1 (Teorema di Bayes)**.** *Sia (Ω, p) uno spazio di probabilità finito e sia $\{B_1, \ldots, B_n\}$ una partizione di Ω e $A \subseteq \Omega$, con $p(A) \neq 0$ e $p(B_i) \neq 0$ per ogni $i \in \{1, \ldots n\}$. Per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$ si ha*

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)P(B_j)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)}\,.$$

Esercizio 2.6. *Dei componenti adulti di una certa popolazione, esattamente il* 40% *va spesso al cinema e il* 30% *va spesso a teatro. Il* 60% *soddisfa almeno una delle due caratteristiche. Se un componente della popolazione va spesso al cinema, qual è la probabilità che vada spesso a teatro?*

Svolgimento: Denotato con A l'insieme di coloro che vanno a teatro e con B l'insieme di coloro che vanno al cinema, la probabilità richiesta è data da

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}\,.$$

Ricordiamo che

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{10}\,,$$

e quindi

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{10} \cdot \frac{100}{40} = 0.25\,.$$

□

Esercizio 2.7. *Il tribunale di Giustonia condanna un imputato colpevole nel* 90% *dei casi e un innocente nell'* 1% *dei casi. L'* 80% *degli imputati che si presentano a Giustonia è colpevole, il* 20% *restante è innocente.*

- *Calcolare la probabilità che un imputato a caso venga condannato.*
- *Un imputato è condannato dal tribunale di Giustonia. Calcolare la probabilità che sia colpevole.*

Svolgimento: Indichiamo con $B_1 = \{\text{Colpevoli}\}$, con $B_2 = \{\text{Innocenti}\}$ e con A l'insieme dei condannati. Il testo ci fornisce le seguenti probabilità: $P(A|B_1) = \frac{90}{100}$, $P(B_1) = \frac{80}{100}$, $P(A|B_2) = \frac{1}{100}$, $P(B_2) = \frac{20}{100}$. La formula della **Proposizione 2.2** ci permette di rispondere alla prima richiesta, infatti

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) = \frac{90}{100}\frac{80}{100} + \frac{1}{100}\frac{20}{100} = 0.722\,.$$

Per la seconda richiesta dobbiamo utilizzare il teorema di Bayes:

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)} = \frac{\frac{90}{100}\cdot\frac{80}{100}}{0.722} = \frac{720}{722}\,.$$

□