Brescia, 18 novembre 2011

Allenamenti di matematica: Algebra e Teoria dei Numeri

1. (a) Risolvi l'equazione $x^3 - 12x^2 + 29x - 18 = 0$.

   (b) Risolvi l'equazione precedente utilizzando il seguente metodo. Effettua il cambio di variabile $x = t + 4$ e ottieni un'equazione della forma $t^3 + pt + q = 0$; risolvi quest'ultima equazione e ricava le soluzioni in x dell'equazione di partenza.

   (c) Dimostra che ogni equazione cubica $x^3 + ax + bx + c = 0$, con a, b, c reali, può essere ricondotta a un'equazione della forma $t^3 + pt + q = 0$, con p, q reali, tramite un opportuno cambio di variabile.

   Soluzione: Vedi soluzioni scritte a mano.

2. Nel seguito, p e q sono numeri reali. Prova le seguenti affermazioni e risolvi le equazioni del punto (g).

   (a) Il numero $t = u + v$ è una soluzione di

$$t^3 + pt + t = 0 \tag{1}$$

   se

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q\,, \\ uv = -\dfrac{p}{3}\,. \end{cases} \tag{2}$$

   (b) I numeri $y_1 = u^3$ e $y_2 = v^3$ sono radici (cioè soluzioni) dell'equazione

$$y^2 + qy - \frac{p^3}{27} = 0\,. \tag{3}$$

   (c) Sia $D = 27q^2 + 4p^3$. Se $D > 0$, allora l'equazione (3) ha due soluzioni reali distinte y_1, y_2 e, posto $u_0 = \sqrt[3]{y_1}$ e $v_0 = \sqrt[3]{y_2}$, le soluzioni del sistema (2) sono date da

$$(u, v) \in \{(u_0, v_0); (u_0 w, v_0 w^2); (u_0 w^2, v_0 w)\}\,, \qquad w = \frac{-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\,,$$

   da cui si ottengono le soluzioni dell'equazione (1)

$$u_0 + v_0\,, \qquad w(u_0 + v_0 w)\,, \qquad w(u_0 w + v_0)\,.$$

   (d) Se $D = 0$, allora l'equazione (3) ha due soluzioni uguali $y_1 = y_2$ e, posto $u_0 = \sqrt[3]{y_1}$, l'equazione (1) ha due soluzioni uguali a $-u_0$ e una soluzione pari a $2u_0$ (tutte le soluzioni sono reali).

(e) Se $D < 0$, allora l'equazione (3) ha due soluzioni complesse coniugate y_1, y_2; $u_0 = \sqrt[3]{y_1}$ e $v_0 = \sqrt[3]{y_2}$ formano una soluzione del sistema (2); scritto u_0 nella forma $u_0 = r(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)$, le tre soluzioni dell'equazione (1) sono tutte reali, e precisamente

$$2r\cos\alpha\,, \qquad 2r\cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right), \qquad 2r\cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right).$$

(f) Ogni equazione cubica a coefficienti reali ha almeno una radice reale.

(g) Risolvi, con il metodo illustrato, le seguenti equazioni

$$\begin{gathered} x^3 - 6x + 9 = 0\,, \\ x^3 - 7x + 6 = 0\,, \\ x^3 - 15x^2 - 33x + 847 = 0 \end{gathered}$$

(per la seconda equazione, non è possibile ricavare esplicitamente il valore esatto dell'angolo. . .).

Soluzione: Vedi soluzioni scritte a mano.

3. Due numeri interi a, b sono tali che $a + b + ab$ è divisibile per 10. Cosa si può dedurre sui due numeri?

   a) sono entambi pari;

   b) sono entrambi dispari;

   c) sono uno pari e uno dispari;

   d) uno di essi è divisibile per 5;

   e) sono entrambi divisibili per 10.

   Soluzione: La risposta è a). Infatti a non può essere dispari, perchè in tal caso $a+b+ab = a + b(a + 1)$ sarebbe somma di un numero dispari e di un numero pari, dunque sarebbe dispari, mentre per ipotesi è un multiplo di 10. Neppure b può essere dispari (l'espressione $a+b+ab$ è simmetrica in a e b.) Dunque le risposte b) e c) sono errate. Anche d) ed e) sono errate come mostra l'esempio $a = 2,\ b = 6$. Tale esempio mostra anche che è effettivamente possibile che con a e b numeri pari opportuni l'espressione sia un multiplo di 10. Si poteva anche osservare che se $a + b + ab$ è multiplo di 10 allora i numeri $a + b$ e ab hanno somma pari, cioè $a + b$ e ab hanno la stessa parità e questo succede solo nel caso in cui ae $b$sono entrambi pari.

4. Per quanti valori interi relativi il numero $\left|\left(x^2 + x - 1\right)\left(x^2 - 7x + 11\right)\right|$ è primo?

   Soluzione: Poniamo $f(x) = x^2 + x - 1$ e $g(x) = x^2 - 7x + 11$.Osserviamo che $\left|f(x)\,g(x)\right|$ è primo se e solo se $\left|f(x)\right| = 1$ e $\left|g(x)\right|$ è primo o viceversa. Si ha $f(x) = 1$ per $x = -2,\ x = 1$; $f(x) = -1$ per $x = -1,\ x = 0$ e i valori $\left|g(-2)\right| = 29$, $\left|g(-1)\right| = 19$, $\left|g(0)\right| = 11$,$\left|g(1)\right| = 5$ sono tutti primi. Inoltre $g(x) = 1$ per $x = 2,\ x = 5$; $g(x) = -1$ per $x = 3,\ x = 4$ e i valori $\left|f(2)\right| = 5$, $\left|f(3)\right| = 11$, $\left|f(4)\right| = 19$,$\left|f(5)\right| = 29$ sono tutti primi.

5. Dato un numero primo p determinare tutte le coppie ordinate di numeri naturali (n, m) che soddisfano l'equazione
$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{p}.$$

Soluzione: Poiché sia m che n devono essere maggiori di p, poniamo $m = p + a$ e $n = p + b$, da cui $(p + a)(p + b) = p(2p + a + b)$e, sviluppando i prodotti,

$$p^2 + ap + bp + ab = 2p^2 + ap + bp$$

cioè $ab = p^2$.Quindi o si ha $a = b = p$,oppure uno dei due numeri è 1 l'altro è p^2. Le soluzioni sono quindi $(2p, 2p)$, $\left(p + 1, p^2 + p\right)$, $\left(p^2 + p, p + 1\right)$.

6. Quante sono le terne (a, b, c) dei numeri reali che verificano il seguente sistema?

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 & = 1 \\ a^3 + b^3 + c^3 & = 1 \end{cases}$$

Soluzione: Le tre soluzioni sono $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$. Infatti $a^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 = 1$ e quindi $|a| \leq 1$. Ciò implica $a^3 \leq |a|^3 \leq a^2$, dove il segno di uguaglianza vale se e solo se $a = 0$ oppure se $a = 1$. Analogamente si ragiona per be c. Perciò se uno dei tre numeri fosse diverso da 0 o da 1 si avrebbe

$$1 = a^3 + b^3 + c^3 < a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

che è assurdo. Di conseguenza due delle incognite devono essere uguali a 0 e una uguale a 1.

7. Trovare la cifra delle unità del numero

$$2^{\left(2^1\right)} + 2^{\left(2^2\right)} + 2^{\left(2^3\right)} + 2^{\left(2^4\right)} + \cdots + 2^{\left(2^{2011}\right)}.$$

Soluzione: Ogni addendo è il quadrato del precedente. Ora $2^{\left(2^1\right)} = 4$, $2^{\left(2^2\right)} = 16$, il terzo termine, essendo il quadrato di un intero che termina con un 6, terminerà anch'esso con un 6, e così via fino al 2011-esimo addendo. Osserviamo ora che la somma di cinque addendi che termina con un 6 è un intero che finisce con uno zero. La cifra delle unità della somma proposta è uguale alla cifre delle unità del primo addendo, cioè 4.

8. Trovare tutte le coppie di numeri interi positivi x e y tali che

$$x^2 + 615 = 2^y.$$

Soluzione: L'unica soluzione è $x = 59$ e $y = 12$. Supponiamo anzitutto che $y$sia pari e poniamo $y = 2z$ (con $z \geq 5$in quanto $2^y > 615$). Si ha allora

$$615 = 2^y - x^2 = (2^z + x)(2^z - x).$$

Poichè $615 = 3 \cdot 5 \cdot 41$ e $2^z - x < 2^z + x$, si avrà che $2^z - x$ potrà essere uguale solo a 1,3,5,15 e $2^z + x$ potrà essere uguale solo a 615,205,123,41. Poichè $2^z + x + 2^z - x = 2^{z+1}$ è una potenza di 2, l'unica possibilità che permette di ottenere una soluzione intera è $2^z - x = 5$ e $2^z + x = 123$, quindi $z = 6$, cui corrisponde la coppia $x = 59$ e $y = 12$. Per concludere che questa è l'unica soluzione di interi positivi dell'equazione diofantea data, è sufficiente dimostrare che y non può essere dispari. Si può vedere direttamente che le potenze pari di 2 danno resto 1 quando vengono divise per 3 e le potenze dispari di 2 danno resto 2 quando vengono divise per 3. Infatti, posto $y = 2z + 1$ si ottiene

$$2^y = 2^{2z+1} = 2 \cdot 4^z = 2 \cdot (3 + 1)^z = 2 \cdot \left(3^z + z3^{z-1} + \frac{z(z+1)}{2} \cdot 3^{z-2} + \cdots + z \cdot 3 + 1\right)$$

quindi 2^yha resto 2 nella divisione per 3. Poichè 615 è divisibile per 3, x non può esserlo. Posto allora $x = 3w \pm 1$ si ottiene

$$x^2 = 9w^2 \pm 6w + 1$$

quindi x^2 ha resto 1 dalla divisione per 3, che è in contrasto con quanto dimostrato su 2^y.

9. Chiamiamo numeri *monotoni* gli interi positivi tali che:

   -si scrivano usando almeno 2 cifre

   -nessuna cifra sia zero

   -le cifre compaiono in ordine strettamente crescente o strettamente descescente.

   Calcolare quanti sono i numeri monotoni di 3 cifre e la somma di tutti i numeri monotoni di 5 cifre.

   Soluzione: a) crescenti = numeri monotoni le cui cifre compaiono in ordine crescente

   decrescenti = numeri monotoni le cui cifre compaiono in ordine decrescente

   gemello di un numero monotono N = intero che si ottiene sostituendo ad ogni cifra di N il suo complementare a 10.

   Ogni numero crescente è il gemello di un numero decrescente, e viceversa.

   Consideriamo solo i numeri monotoni crescenti: il più piccolo numero di 3 cifre che rispetta la consegna è 123, i numeri del tipo 12* che possiedono i requisiti richiesti sono 7, quelli del tipo 13* sono 6 e porseguendo con la cifra successiva delle decine si arriva fino a quello del tipo 18* che è solo uno. Quindi quelli che hanno come prima cifra 1 sono 7+6+5+4+3+2+1 =28. Ripetendo il ragionamento otteniamo che quelli con prima cifra 2 sono 6+5+4+3+2+1=21 , con prima cifra 3 sono 5+4+3+2+1=15 ... in totale quelli crescenti sono 84. Quindi i numeri monotoni di 3 cifre sono 168.

   Equivalentemente in modo meno empirico: i numeri crescenti sono tanti quanti i modi di scegliere tre cifre diverse in un insieme di nove ossia

   $$\binom{9}{3} = \frac{9!}{3!6!} = 84$$

   b)La somma di un numero monotono di 5 cifre e del suo gemello è sempre uguale a 111110. Supponiamo ora di aver scritto la somma S di tutti i numeri interi monotoni di cinque cifre. In tale somma possiamo raggruppare gli addendi a due a due, in modo che ogni crescente corrisponde al suo gemello descrescente, dunque S e' somma di addendi tutti uguali a 111110. Inoltre gli addendi sono tanti quanti i numeri crescenti, i quali a loro volta sono tanti quanti i modi di scegliere cinque cifre diverse in un insieme di nove, cioè

   $$\binom{9}{5} = \frac{9!}{5!4!} = 126.$$

   Pertanto la somma di tutti i monotoni e' $126 \cdot 111110 = 13999860$.

10. $34! = 295232799 * *96041408476186096435 * *000000$. Al numero 34! sono state sostituite 4 cifre con degli *. Quali sono le cifre mancanti?

    Soluzione: Nominiamo con a, b, c, d gli * . Il numero di zero finali di 34! è 7 in quanto tra i vari fattori che formano 34! troviamo $2, 5, 6, 10, 15, 16, 20, 25, 26$e 30 da cui ottendiamo

$d = 0$. Ora utilizziamo i criteri di divisibilità per ottenere le altre cifre mancanti, per fare ciò possiamo considerare il numero private delle sue ultime 6 cifre (tutti zeri). Per il criterio di divisibilità per 8, otteniamo $c = 2$ oppure $c = 6$. Infatti $5c0$ è congruo a zero modulo 8 solo nei due casi prima indicati. Possiamo scartare il caso $c = 6$ ripetendo il ragionamento precedente sul numero privato delle sue ultime 7 cifre.

Utilizzando il criterio di divisibilità per 3 e per 11 otteniamo il sistema

$$\begin{cases} b - a + 19 = 0 & \mod 11 \\ a + b = 0 & \mod 3 \end{cases}$$

Le coppie (a, b) che lo soddisfano sono $(0, 3)$, $(3, 9)$, $(6, 9)$.

Sostituendo tutte le cifre ottenute al posto degli * e applicando il criterio di divisibilità per 7 si ottiene facilmente che l'unica quaterna che soddisfa tutte le richieste è $(0, 3, 2, 0)$.

11. Un alunno distratto ha scritto male i compiti, ricorda vagamente che doveva risolvere un'equazione del tipo

$$x^9 + ?x + 3 = 0$$

ma non riesce a farsi venire in mente il coefficiente di x. Si ricorda solo che era un multiplo positivo di 10 e sa che l'equazione deve avere almeno una soluzione intera. Detereminare il coefficiente dimenticato.

Soluzione: Se p è un primo che divide x (x è una soluzione intera della equazione), si ha che p divide i primi due termini dell'equazione, e quindi deve dividere 3 (il terzo termine). Gli unici valori possibili per x sono dunque -3,-1, 1, 3, dopo aver escluso anche le potenze di 3 per la stessa ragione.

A questo punto si potrebbe già procedere per tentativi provando a sostituire a x ciascuno di questi quattro valori; in alternativa si può restringere ulteriormente il campo procedendo come segue. Riducendo l'equazione modulo 10 si ottiene

$$x^9 + 3 = 0 \mod 10$$

dove il termine di grado 1 in x non è presente perchè il testo specifica che il coefficiente sconosciuto è multiplo di 10 e quindi congruo a 0 modulo 10.

Ora è necessario sfruttare una versione del piccolo teorema di Fermat che asserisce che $x^k = 1 \mod n$ se $k = \varphi(n)$ e x è primo con n; $\varphi(n)$ è la funzione di Eulero, che conta il numero di interi positivi minori di n che sono primi con n. Per numeri $n = pq$ con p e q primi la funzione φ può essere esplicitata come $\varphi(pq) = (p-1)(q-1)$ e quindi $\varphi(10) = 1 \cdot 4 = 4$.

Nel caso specifico $n = 10$ si può anche elencare agevolmente tutti i numeri minori di 10 e primi con 10: $\{1, 3, 7, 9\}$, che sono proprio i valori di x (considerati modulo 10) che sono stati isolati in precedenza. Il piccolo teorema di Fermat quindi implica che (lavorando sempre modulo 10): $x^9 = x\left(x^4\right)^2 = x$, da cui si ricava $x = -3 \mod 10$ o equivalentemente $x = 10k - 3$ per un qualche k intero (positivo, negativo o nullo). L'unico valore di k compatibile con le possibili scelte di x viste all'inizio è $k = 0$, ovvero $x = -3$. Indicando con a il coefficiente incognito, la sostituzione $x = -3$ porta a

$$3(3^8) + 3 \cdot a + 3 = 0$$

e semplificando per 3 otteniamo $a = 3^8 - 1 = 6560$.

La risposta è dunque 6560.

12. Trova tutte le funzioni $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ tali che

$$2x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = \frac{x}{x+1}.$$

Soluzione: L'idea è quella di sfruttare la simmetria dell'equazione: deve anche essere

$$\frac{2}{x^2} f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x+1}, \quad \forall x > 0.$$

Eliminando $f(\frac{1}{x})$ si trova subito

$$f(x) = \frac{2x^2 - x}{3(x+1)}.$$

13. Dimostra che l'unica soluzione (x, y, z), dove $x, y, z \in \mathbb{Q}$, dell'equazione cubica

$$x^3 + 3y^3 + 9z^3 - 9xyz = 0$$

è la soluzione banale $(0, 0, 0)$.

Soluzione: Se l'equazione data ha una soluzione (x, y, z), dove $x, y, z \in \mathbb{Q}$ allora ha anche una soluzione (x_0, y_0, z_0), dove $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{Z}$. Ma allora

$$x_0^3 = -3y_0^3 - 9z_0^3 - 9x_0y_0z_0$$

per cui x_0 deve essere multiplo di 3. Segue che $x_0 = 3x_1$, per un certo x_1 naturale. Si ha quindi

$$27x_1^3 + 3y_0^3 + 9z_0^3 - 27x_1y_0z_0 = 0$$

ovvero

$$9x_1^3 + y_0^3 + 3z_0^3 - 9x_1y_0z_0 = 0$$

cioé

$$y_0^3 + 3z_0^3 + 9x_1^3 - 9x_1y_0z_0 = 0$$

che vuol dire che la terna (y_0, z_0, x_1) è ancora una soluzione. Usando lo stesso procedimento, e ponendo $y_0 = 3y_1$ si ha che (z_0, x_1, y_1) è soluzione, e di nuovo ponendo $z_0 = 3z_1$ si trova che allora (x_1, y_1, z_1) è ancora soluzione. Abbiamo quindi mostrato che se (x_0, y_0, z_0) è una soluzione intera allora dividendo ciascuna variabile per 3 si trova ancora una soluzione intera, e questo procedimento può continuare all'infinito, che è una contraddizione, a meno che $x_0 = y_0 = z_0 = 0$.

14. Considera l'equazione quartica generale

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0\,.$$

Prova, attraverso una sostituzione della forma $x = t + \alpha$, che si può sempre ridurre l'equazione quartica generale ad un'equazione quartica della forma

$$t^4 + pt^2 + q = rt\,.$$

In particolare, determina i coefficienti p, q, r in funzione di a, b, c, d.

Soluzione: La sostituzione $x = t + \alpha$ porta all'equazione

$$t^4 + 4t^3\alpha + 6t^2\alpha^2 + 4t\alpha^3 + \alpha^4 + at^3 + 3at^2\alpha + 3at\alpha^2 + a\alpha^3 + bt^2 + b\alpha^2 + 2bt\alpha + ct + c\alpha + d = 0.$$

Il coefficiente che moltiplica t^3 è dato da $4\alpha + a$ che si annulla scegliendo

$$\alpha = -\frac{a}{4}.$$

Ne segue che la sostituzione $x = t - \frac{a}{4}$ porta all'equazione

$$t^4 + pt^2 + q = rt$$

con

$$p = b - \frac{3}{8}a^2, \quad q = -\frac{3}{256}a^4 + \frac{1}{16}a^2b - \frac{1}{4}ca + d, \quad r = -\frac{11}{16}a^3 + \frac{1}{2}ab - c.$$

15. Sia n un numero naturale. Denota con $\tau(n)$ il numero dei divisori di n minori di n. Prova i seguenti fatti.

(a) Se $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$ è la fattorizzazione in primi di n, allora

$$\tau(n) = (e_1 + 1)(e_2 + 1) \cdots (e_k + 1)\,.$$

(b) Trova il numero di soluzioni ordinate (x, y), con x, y naturali non nulli, che risolvono l'equazione

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$$

essendo n naturale non nullo fissato.

Soluzione:

(a) Basta osservare che se p è primo e e è naturale non nullo allora $\tau(p^e) = e + 1$.

(b) L'equazione data equivale a $xy = nx + ny$ che vuol dire

$$(x - n)(y - n) = n^2. \tag{4}$$

Se $n = 1$ allora è ovvio che abbiamo l'unica soluzione $(x, y) = (2, 2)$. Se $n \geq 2$ fattorizziamo n in primi ponendo $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$. Siccome deve essere $x, y > n$ allora, grazie alla (4) esiste una corrispondenza biunivoca tra le soluzioni ordinate dell'equazione data e i divisori di n^2 minori di n^2. Ne segue che il numero richiesto vale

$$\tau(n^2) = (2e_1 + 1)(2e_2 + 1) \cdots (2e_k + 1).$$

1 (a) $x^3 - 12x^2 + 29x - 18 = 0$

$x = t + 4$

$(t+4)^3 - 12(t+4)^2 + 29(t+4) - 18 = 0$

$t^3 + \cancel{12t^2} + 48t + 64 - \cancel{12t^2} - 96t - 192 + 29t + 116 - 18 = 0$

$t^3 - 19t - 30 = 0$ $\quad p(t) = 0 \quad p(5) = 0$

	1	0	−19	−30
5		5	25	30
	1	5	6	/

$(t-5)(t^2+5t+6) = 0$

$(t-5)(t+2)(t+3) = 0$

$\downarrow$ $p(-2) = 0$

$t = 5 \quad x = 9$

$t = -2 \quad x = 2$

$t = -3 \quad x = 1$

(b) $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$

trasforma in $t^3 + pt + q = 0$

$x = t + \alpha$ $\quad \alpha$ da trovare

$(t+\alpha)^3 + a(t+\alpha)^2 =$

$= t^3 + 3\alpha t^2 + 3\alpha^2 t + \alpha^3 + at^2 + 2a\alpha t + a\alpha^2$

$= t^3 + (3\alpha + a)t^2 + (3\alpha^2 + 2a\alpha)t + \alpha^3 + a\alpha^2$

$\alpha = -\frac{a}{3}$ $\quad \boxed{x = t - \frac{a}{3}}$

② $t^3 + pt + q = 0$

(a) $t = u+v$ sol $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} u^3+v^3 = -q \\ uv = -\frac{p}{3} \end{cases}$

$$(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0$$

$$u^3 + v^3 + 3uv(u+v) + p(u+v) + q = 0$$

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u+v) + q = 0 .$$

(b) $x = u^3$ e $x = v^3$ sono radici di

$$x^2 + qx - \frac{p^3}{27} = 0$$

$ax^2 + bx + c = 0$

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

$\frac{(-b-\sqrt{\Delta})(-b+\sqrt{\Delta})}{4a^2} = \frac{\cancel{b^2} - \cancel{b^2} + \cancel{4}ac}{\cancel{4}a^{\cancel{2}}} = \frac{c}{a}$

$$x_\pm = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}$$

$$\begin{cases} x_+ + x_- = -q \\ x_+ \cdot x_- = -\frac{p^3}{27} \end{cases}$$

$uv = -\frac{p}{3}$

$\Updownarrow$

$u^3v^3 = \left(-\frac{p}{3}\right)^3 = -\frac{p^3}{27}$

$x_+ = u^3$

$x_- = v^3$

(c) $D := 27q^2 + 4p^3$ $\quad p, q \in \mathbb{R}$

Se $D > 0$, $x^2 + qx - \frac{p^3}{27} = 0$ ha sol reali x_1, x_2.

Inoltre, se $u_0 = \sqrt[3]{x_1}$ e $v_0 = \sqrt[3]{x_2}$ (radici cubiche reali), $\Longrightarrow$ ~~il sistem~~

$$(u,v) \in \{ \underset{u_0+v_0}{(u_0, v_0)}, \underset{\omega(u_0+v_0\omega)}{(u_0\omega, v_0\omega^2)}, \underset{\omega(u_0\omega+v_0)}{(u_0\omega^2, v_0\omega)} \}$$

sono sol del sistema in (a), con

~~(u_0, v_0) sol~~ $\quad \omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$

$\sqrt{-3}$ è un numero t.c. $(\sqrt{-3})^2 = -3$

- ~~$\omega^2 = \frac{1-3-2\sqrt{-3}}{4} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-3}}{2}$~~

$$\omega^3 = \frac{-1 + 3\sqrt{-3} - 3(-3) + (\sqrt{-3})^3}{8}$$

$$= \frac{8 + \sqrt{-3}\,(3-3)}{8} = 1 \qquad \omega^3 = 1$$

OK

(d) $D = 0$, $\Rightarrow x_1 = x_2$, $\quad u_0 = \sqrt[3]{x_1}$

$\Rightarrow \quad t^3 + pt + q = 0$ ha 3 soluzioni reali

e $\quad t^3 + pt + q = (t+u_0)^2(t-2u_0)$

- $t = u+v = 2u_0$ è sol: $8u_0^3 + 2pu_0 + q = 0$

$q = -(u_0^3 + u_0^3) = -2u_0^3$

$p = -3u_0^2$

$t^3 - 3u_0^2 t - 2u_0^3 = 0 \qquad p(2u_0) = 8u_0^3 - 6u_0^3 - 2u_0^3 = 0$

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1 & 0 & -3u_0^2 & -2u_0^3 \\
2u_0 & & 2u_0 & 4u_0^2 & 2u_0^3 \\
\hline
 & 1 & 2u_0 & u_0^2 & /
\end{array}$$

$(t - 2u_0)(t^2 + 2u_0 + u_0^2) = 0$

$(t - 2u_0)(t + u_0)^2 = 0$.

(e) Se $D < 0$, $\Rightarrow$ $(\cdot)$ $x^2 + qx - \frac{p^3}{27} = 0$ ha due soluzioni ~~di forma~~ complesse coniugate, cioè della forma

$x_+ = \alpha + \beta i \qquad x_- = \alpha - \beta i$

$(\cdot\cdot)$ $\exists\, u = \sqrt[3]{x_+} \qquad \exists\, v = \sqrt[3]{x_-}$ ~~tra~~ u, v complessi coniugati t.c.

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -\frac{p}{3} \end{cases}$$

$(\therefore)$ Scritto $u = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ $v = r(\cos\vartheta - i\sin\vartheta)$, le 3 sol di $x^3 + px + q = 0$ sono

$2r\cos\vartheta \qquad 2r\cos\left(\vartheta + \frac{2\pi}{3}\right) \qquad 2r\cos\left(\vartheta + \frac{4\pi}{3}\right)$

(•) $\Delta = D < 0$

$$x_\pm = \frac{-q \pm \sqrt{-(-D)}}{2} = \frac{-q \pm i\sqrt{-D}}{2}$$

$$= -\frac{q}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{-D}}{2}$$

(••) pto (b)

(∴) $u+v = 2r\cos\vartheta$ ✓ è sol.

$$x^3 + px + q = 0$$

$$p = -3uv = -3r^2(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta) = -3r^2$$

$$q = -(u^3+v^3) = -r^3(\cos 3\vartheta + \cancel{i\sin 3\vartheta} + \cos 3\vartheta - \cancel{i\sin 3\vartheta})$$

$$= -2r^3\cos 3\vartheta$$

$$x^3 - 3r^2 x - 2r^3\cos 3\vartheta = 0$$

$$\begin{array}{r|ccc|c}
 & 1 & 0 & -3r^2 & -2r^3\cos 3\vartheta \\
2r\cos\vartheta & & 2r\cos\vartheta & 4r^2\cos^2\vartheta & 2r^3(4\cos^3\vartheta - 3\cos\vartheta) \\
\hline
 & 1 & 2r\cos\vartheta & r^2(4\cos^2\vartheta - 3) & ✓
\end{array}$$

$$\cos 3\vartheta = 4\cos^3\vartheta - 3\cos\vartheta$$

$$x^2 + 2(r\cos\vartheta)x + r^2(4\cos^2\vartheta - 3) = 0$$

$$x = -r\cos\vartheta \pm \sqrt{r^2\cos^2\vartheta + 3r^2 - 4r^2\cos^2\vartheta}$$

$$= -r\cos\vartheta \pm \sqrt{3r^2(1-\cos^2\vartheta)} = -r\cos\vartheta \pm \sqrt{3}\,r\sin\vartheta$$

$-r\cos\vartheta \pm \sqrt{3} r \sin\vartheta$

$$\begin{array}{cc} \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \\ \parallel & \end{array}$$

$$-\cos\vartheta - \sqrt{3}\sin\vartheta = -2\left(\frac{1}{2}\cos\vartheta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\vartheta\right)$$

$$= -2\sin\left(\vartheta + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$x_2 = 2r\sin\left(-\vartheta - \frac{\pi}{6}\right) = 2r\cos\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 2r\cos\left(\vartheta + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\begin{array}{cc} \cos\frac{\pi}{6} & \sin\frac{\pi}{6} \end{array}$$

$$-\cos\vartheta + \sqrt{3}\sin\vartheta = +2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\vartheta - \frac{1}{2}\cos\vartheta\right)$$

$$= 2\sin\left(\vartheta - \frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$x_3 = 2r\,\cancel{\sin}\cos\left(-\vartheta + \frac{2\pi}{3}\right) = 2r\cos\left(\vartheta - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= 2r\cos\left(\vartheta + \frac{4\pi}{3}\right) \quad \blacksquare$$

(f) Ogni equazione cubica con coeff reali ha una radice reale.

③ Risolvi, con i metodi visti

(a) $x^3 - 6x + 9 = 0$

(b) $x^3 - 7x + 6 = 0 \longrightarrow$ approssima

(c) $x^3 - 15x^2 - 33x + 847 = 0$

• (a) $D = 27q^2 + 4p^3 = 27 \cdot 9^2 - 4 \cdot 6^3 = 1323 > 0$

$x^2 + qx - \frac{p^3}{27} = 0 \qquad x^2 + 9x + 8 = 0$

$(x+8)(x+1) = 0 \qquad x_1 = -1 \qquad x_2 = -8$

$u_0 = \sqrt[3]{-1} = -1 \qquad v_0 = \sqrt[3]{-8} = -2$

$u_0 + v_0 = -3 \qquad \omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$

$u_0\omega + v_0\omega^2 = -\omega - 2\omega^2 = -\omega(1+2\omega)$

$= \frac{1-\sqrt{-3}}{2}\left(\cancel{1} - \cancel{1} + \sqrt{-3}\right) = \frac{\sqrt{-3}}{2} + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} + i\frac{3}{2}$

$\omega(u_0\omega + v_0) = \omega(-\omega - 2) = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\left(\frac{1-\sqrt{-3}}{2} - 2\right)$

$= \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \quad \frac{1-\sqrt{-3}-4}{2} = \frac{1}{4}\left(-1-3+3\sqrt{-3}\right)$

$= -1 + \frac{3}{4}\sqrt{3}\, i$

(b)* $x^3 - 7x + 6 = 0$

$$D = 27q^2 + 4p^3 = 27\cdot 6^2 - 4\cdot 7^3 = -400 < 0$$

$$\cancel{x_\pm = 7 \pm \sqrt{49-24}}$$

$$x^2 + qx - \frac{p^3}{27} = 0 \qquad x^2 + 6x + \left(\frac{7}{3}\right)^3 = 0$$

$$x_\pm = -3 \pm \sqrt{9 - \left(\frac{7}{3}\right)^3}$$

$$= -3 \pm \sqrt{\frac{-100}{3^3}} = -3 \pm \frac{10}{3\sqrt{3}}\, i$$

$$= -3 \pm \frac{10\sqrt{3}}{9}\, i$$

$$|x_\pm| = \sqrt{9 + \frac{\cancel{300}\,100}{\cancel{81}\,27}} = \sqrt{\frac{343}{3^3}} = \left(\frac{7}{3}\right)^{3/2}$$

$$x_\pm = \left(\frac{7}{3}\right)^{3/2} \left[-3\,\frac{3\sqrt{3}}{7\sqrt{7}} \pm \frac{10\sqrt{3}}{\cancel{9}}\,\frac{3\sqrt{3}}{7\sqrt{7}}\, i\right]$$

$$\cancel{= \left(\frac{7}{3}\right)^{3/2}} \qquad \cos\alpha = \frac{-9\sqrt{3}}{7\sqrt{7}} \qquad \sin\alpha = \frac{10}{7\sqrt{7}}$$

$$\tan\alpha = \frac{10}{-9\sqrt{3}}$$

$$x_\pm = \left(\frac{7}{3}\right)^{3/2} (\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

$$u = \left(\frac{7}{3}\right)^{1/2} \left(\cos\frac{\alpha}{3} + i\sin\frac{\alpha}{3}\right)$$

$$x_1 = 2\sqrt{\frac{7}{3}}\cos\frac{\alpha}{3} \qquad x_2 = 2\sqrt{\frac{7}{3}}\cos\left(\frac{\alpha+2\pi}{3}\right)$$

$$x_3 = 2\sqrt{\frac{7}{3}}\cos\left(\frac{\alpha+4\pi}{3}\right)$$

8)

(c) $x^3 - 15x^2 - 33x + 847 = 0$

$x = t + 5$

$(t+5)^3 - 15(t+5)^2 - 33(t+5) + 847 = 0$

$t^3 + \cancel{15t^2} + 75t + 125 - \cancel{15t^2} - 150t - 375 - 33t - 165$
$+ 847 = 0$

$t^3 - 108t + 432 = 0$

$D = 27 \cdot 432^2 - 4 \cdot 108^3 = 0$

$\tilde{x}^2 + q\tilde{x} - \frac{p^3}{27} = 0$ $\qquad$ $\tilde{x}^2 + 432\tilde{x} + 36^3 = 0$

$(\tilde{x} + 6^3)^2 = 0$ $\qquad$ $432 = 2 \cdot 6^3$

$\tilde{x} = -6^3 = -216$ $\qquad$ $\cancel{t_1 = -\tilde{x} = -u_0 = 216}$

$u_0 = \sqrt[3]{-6^3} = -6$ $\qquad$ $\cancel{t_{2,3} = 2u_0 = 2\tilde{x} = -432}$

$\cancel{x = t + 5}$ $\qquad$ $\cancel{x_1 = 221}$ $\qquad$ $\cancel{t_1 = 2u_0 = -432}$

$\cancel{x_{2,3} = -427}$ $\qquad$ $\cancel{t_{2,3} = -u_0 = 216}$

$\cancel{x = t + 5}$ $\qquad$ $\cancel{x_1 = -427}$ $\qquad$ $\cancel{x_{2,3} = 221}$

$t_{1,2} = -u_0 = 6$ $\qquad$ $t_3 = 2u_0 = -12$

$x = t + 5$

$x_{1,2} = 11$ $\qquad$ $x_3 = -7$ $\qquad$ $\square$