



Università
di Genova

Progetto Olimpiadi della Matematica



Ministero
dell'Istruzione
e del Merito



Unione
Matematica
Italiana

Istruzioni Generali

- ▶ Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre. Si ricorda anche che occorre sempre e comunque compilare tutte le 4 cifre, eventualmente aggiungendo degli zeri iniziali.
- ▶ Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera. Si ricorda che la parte intera di un numero reale x è il più grande intero minore od uguale ad x .
- ▶ Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- ▶ Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- ▶ Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:
 $\sqrt{2} = 1,4142$ $\sqrt{3} = 1,7321$ $\sqrt{5} = 2,2360$ $\pi = 3,1415$.

Scadenze importanti

- ▶ **10 minuti dall'inizio:** termine ultimo per la scelta del problema Jolly (dopo verrà assegnato d'ufficio il primo problema della lista). La scelta deve essere effettuata attraverso il modulo di consegna.
- ▶ **30 minuti dall'inizio:** termine ultimo per fare domande sul testo. Le domande devono essere rivolte solo dai capitani attraverso il canale previsto.
- ▶ **100 minuti dall'inizio:** termine dell'incremento dei punteggi dei problemi.
- ▶ **120 minuti dall'inizio:** termine della gara.

Aspettando Godol

Tragicommedia in due atti

da un'idea di Samuel Beckett⁽¹⁾

Atto primo

È pomeriggio, circa le tre. Lungo una strada di campagna, vicino a un albero, seduto su un masso, Astragone cerca di togliersi uno stivale; si sforza, ma non ci riesce. Prova ancora, ma il risultato è lo stesso. Entra Teodomiro.

Astragone (Parlando tra sé) Non c'è niente da fare.

Teodomiro (Parlando tra sé) Penso proprio così. Mi dico sempre: «Coraggio, Teodomiro, non hai provato tutte le strade.» E riprendo la lotta. (Si

accorge della presenza di Astragone) Ma ci sei anche tu!

Astragone Ci sono, dove?

Teodomiro Credevo che non ti avrei più rivisto.

Astragone Anch'io.

⁽¹⁾ L'autore di un problema è indicato prima del testo.



1. *Sandro Campigotto*
Teodomi Mentre venivo, pensavo alle coppie ordinate (a, b) di numeri interi tali che $ab = 2023^2$.
Astragone Quante sono?

2. *Giuseppe Rosolini*
Teodomi Ti ho portato due fogli rettangolari.
Astragone Di che dimensioni?
Teodomi Sono tutti $30 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$.
(*Astragone passa alcuni minuti sistemando con molta cura i fogli a terra; alla fine i due rettangoli sono sovrapposti. La parte sovrapposta è un quadrato*) Perché hai fatto una croce con i rettangoli?
Astragone Non è una croce: ho tracciato sul terreno anche i segmenti che collegano due vertici vicini dei rettangoli esterni. È venuto un ottagono con lati opposti paralleli e uguali.
Teodomi Quanti cm^2 è l'area dell'ottagono?

3. *Giuseppe Rosolini*
Astragone Che cosa facciamo?
Teodomi Aspettiamo.
Astragone Chi?
Teodomi Godol.
Astragone Verrà?
Teodomi Ha detto che sarebbe venuto.
Astragone Non so cosa fare.
Teodomi Conta fino a 1000.
Astragone 1-2-3-4-5-6-7
Teodomi (*Lo interrompe*) 993
Astragone Che cosa dici?
Teodomi Ogni sette numeri che dichiaro, dico quanti ne devi ancora contare.
Astragone Qual è il primo numero che dico più grande di uno di quelli che avrai detto tu in precedenza?

4. *Sandro Campigotto*
Astragone Stavo pensando, Dodo?
Teodomi A cosa?
Astragone In quanti modi si scrive un'addizione con numeri interi maggiori di 1 che dia risultato 10, usando tra gli addendi almeno un 2?
Teodomi L'ordine è rilevante?
Astragone Certo, $8 + 2$ e $2 + 8$ sono scritte diverse.

5. *Sandro Campigotto*
Astragone Prendi i numeri interi da 1 fino a n , diciamo 5. Mettili in sequenza con un picco.
Teodomi Che cos'è una sequenza con un picco?
Astragone Te lo spiego: ci sono numeri che crescono fino a 5, almeno uno; poi ci sono numeri che diminuiscono da 5, almeno uno. (*Teodomi è sorpreso*) Ad esempio, 2-3-5-4-1 è una sequenza con picco, anche 1-5-4-3-2. Ma 3-2-5-4-1 non è una sequenza con un picco perché i numeri non crescono fino a 5, e 5-4-3-2-1 non ha un picco perché non ci sono numeri in salita. Neppure 1-2-3-4-5 ha un picco: mancano numeri in discesa.
Teodomi (*Guarda quello che Astragone scrive per terra*) Stai usando i numeri da 1 a 9.
Astragone Sì, sto scrivendo le 10 sequenze con picco dei numeri da 1 a 9.
Teodomi Ma non sono 10!
Astragone Come no! Quante sono le sequenze con picco di numeri interi da 1 a 9?

6. *Carlo Càssola*
Teodomi (*Parlando tra sé*) Chissà qual è il più grande fattore primo del numero $48^4 - 22^4$?

7. *Carlo Càssola*
Astragone Guarda! (*Teodomi guarda*) Ho disegnato il triangolo ABC . (*Indica il primo triangolo*) I suoi lati misurano $AB = 45 \text{ cm}$, $BC = 39 \text{ cm}$, $CA = 12 \text{ cm}$. Poi ho disegnato il triangolo CAD ; (*Indica il secondo triangolo*) i suoi altri due lati misurano $CD = 39 \text{ cm}$ e $AD = 45 \text{ cm}$. Quanto vale la lunghezza del segmento che congiunge B con D ? (*Teodomi ride*)

8. *Sandro Campigotto*
Teodomi Sapevo che il numero naturale n è il prodotto di due numeri primi e che, sottraendo n alla somma dei divisori di n , si ottiene 2023. Mi piacerebbe sapere quanto vale n .
Astragone Le condizioni non bastano, Dodo! Ci sono 59 numeri che verificano le condizioni.
Teodomi Però, Gogo, il numero n che pensavo è il massimo tra quelli. Quanto vale allora n ? [*Dare come risposta le prime quattro cifre significative di n .*]

9. Carlo Càssola
Astragone Nel triangolo ABC il lato AB è lungo 6,7 m, il lato BC è lungo 9 m, l'altezza da A è lunga 6 m.

Teodomiro Disegna i punti medi dei tre lati: M su BC, N su AB e P su AC. Su AM prendi i punti D e E tali che $AD = DE = EM$. Quanto vale il rapporto fra l'area del triangolo ABC e l'area del triangolo ANE?

10. Simone Muselli
Teodomiro Ricordo ancora quando ero presentabile e volevo comperare la nuova **Interius**. Ricordo che la Maxiclette la lanciò sul mercato a un prezzo inferiore al prezzo di listino, ma comunque superiore a $\frac{5}{6}$ del prezzo di listino. Mantenne quel prezzo per un anno, poi passò a prezzo di listino. Passato un anno, la Maxiclette decise di scontarlo di più del 16,6% rispetto al prezzo di listino, tornando esattamente al prezzo dell'anno di lancio. La cosa incredibile è che, per una scelta aziendale, l'**Interius** ha sempre un prezzo intero positivo.
Astragone Quanto era, come minimo, il prezzo di listino dell'**Interius**?

11. Carlo Càssola
Astragone Tra i quadrilateri con soli angoli retti i cui lati, misurati in centimetri, hanno lunghezza intera, prendi quelli il cui perimetro in centimetri è lo stesso numero di quello dell'area in centimetri quadrati. Quali sono tutte queste aree?
[Dare come risposta la somma di tutte le aree diverse.]

12. Carlo Càssola
Astragone Aspettando, ho scritto tutti i numeri da 1000 fino a 10000.
Teodomiro Lascia il primo numero, cancella il numero che lo segue.
Astragone Cioè il 1001, potevi dirlo.
Teodomiro Fai come ti dico! Ora lascia il numero che segue, cancella i due numeri dopo.
Astragone Cioè il 1003 e il 1004.
Teodomiro Giusto! Ora lascia il numero che segue, cancella i tre numeri dopo. Lascia il numero che segue; cancella i quattro dopo. Continua: ogni volta lasci scritto un numero e cancelli tanti numeri quanti ne hai cancellati nel passo precedente più un altro.
Astragone Qual è il numero più grande e minore di 10000 che rimane scritto sul foglio?

13. Carlo Càssola
Notevole trambusto fuori scena; entrano Pucky, carico di valigie, con una corda al collo, e Lozzo, che tiene la corda e una frusta; la fa schioccare.
Astragone (Rivolto a Teodomiro) Attento, tirati indietro! (Lozzo vede Astragone e Teodomiro, si ferma. La corda si tende, trattenendo per il collo Pucky, che cade rovinosamente) È lui?

Teodomiro Chi?

Astragone Godol.

Po Mi presento: sono Lozzo. Volevo chiedervi: presi a caso tre numeri interi positivi minori di 6, a due a due distinti, qual è la probabilità che i numeri scelti siano le lunghezze in metri dei lati di un triangolo di area non nulla?
[Dare come risposta la probabilità moltiplicata per 10^4 .]

14. Carlo Càssola
Lozzo (Rivolto a Astragone) Nel triangolo ABC rettangolo in A, inscrivi il quadrato ADEF in modo che i punti D e F siano sui cateti AB e CA, rispettivamente, e E sull'ipotenusa. Misura CF e DB.

Astragone $CF = 112$ cm, $DB = 63$ cm.

Teodomiro Bene! Qual è l'area di ADEF?

15. Carlo Càssola
Teodomiro (Cercando di non guardare Pucky, parlando tra sé) Qual è la potenza del fattore 7 nella scomposizione del fattoriale $7^7!$ in fattori primi?
Pucky Il fattoriale di un numero intero positivo n è il prodotto di tutti i numeri interi positivi minori o uguali a n , vero? (Teodomiro annuisce)
[Dare come risposta le prime quattro cifre significative del risultato.]

16. Giuseppe Rosolini
Lozzo (Rivolto a Teodomiro e Astragone) Prendete una funzione tale che $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ e $g(n + m) = g(n) \cdot g(m)$ per n e m numeri positivi. Prendete anche una funzione tale che $f(0, m) = 0$ e $f(n + 1, m)$ è il prodotto di due somme: la somma $1 + g(m) \cdot [g(m - f(n, m)) - 1]$ e la somma $1 + f(n, m)$.

Astragone (Scrive rapidamente per terra)

$f(2, 0) = 2$, $f(2, 1) = 0$.

Lozzo Per forza! Ma che numero è $f(235, 532) + f(532, 235)$?

17. Carlo Càssola
Astragone (Gira intorno a Pucky, cercando di distrarlo) Se so che tre delle radici del polinomio $x^4 - ax^2 + bx + c$ sono -1 , -3 e -4 , quanto valgono a , b e c ?
[Dare come risposta il valore di $ab + bc + ac$.]

18.

Luca Renzi

Lozzo (*Rivolto a Astragone*) Mettigli il cappello in testa. (*Astragone esegue, ma il cappello cade, Lozzo si infastidisce*) Raccogli il cappello! Rimettiglielo in testa; non vedi che è caduto? (*Astragone esegue attento*)

Pucky (*Aprè gli occhi e la bocca*) ...un'isola con animali molto strani: sono numerati da 1 a 100; parlano, ma dicono soltanto «sì» o «no»; inoltre mentono sempre... esattamente uno di loro è carnivoro... voglio scoprire qual è... va bene, domando solo

«Sei carnivoro?» oppure

«Tra gli animali con numero compreso tra n e m (escluso te, se hai uno di quei numeri) è presente quello carnivoro?»

Astragone (*Sussurrando a Teodomiro*) Quante domande come minimo deve fare per essere certo di determinare, in ogni caso, il numero dell'animale carnivoro?

19.

Giuseppe Rosolini

Astragone (*Rivolto a Teodomiro*) Hai visto il pendaglio che ha Pucky al collo? È un tetraedro regolare, diciamo di spigolo l , composto da quattro tetraedri regolari di metà spigolo, cioè lungo $\frac{l}{2}$.

Teodomiro (*Studiando il pendaglio da vicino*) E i quattro tetraedri si appoggiano su un ottaedro regolare, pure di spigolo $\frac{l}{2}$.

Astragone (*Girano intorno a Pucky*) Ti immagini se l'ottaedro che ha nel pendaglio fosse a sua volta composto da 6 ottaedri di spigolo $\frac{l}{4}$ che si appoggiano su tetraedri regolari, pure di spigolo $\frac{l}{4}$...

Teodomiro (*Girando sempre più in fretta*) Beh, scomporrei anche ciascuno dei 4 tetraedri di spigolo $\frac{l}{2}$ in 4 tetraedri e un ottaedro, ognuno di spigolo $\frac{l}{4}$.

Astragone (*Pucky si agita*) E se scomponessimo ciascun tetraedro e ciascun ottaedro di spigolo $\frac{l}{4}$ in tetraedri e ottaedri di spigolo $\frac{l}{8}$... (*Pucky raccoglie le valigie. Lozzo schiocca la frusta, Pucky si muove, escono di scena*)

Teodomiro E se lo facessimo ancora una volta, scomponendo ciascun tetraedro e ciascun ottaedro di spigolo $\frac{l}{8}$ in tetraedri e ottaedri di spigolo $\frac{l}{16}$, quanti tetraedri di spigolo $\frac{l}{16}$ ci sarebbero nel pendaglio? (*Crollano a terra sfiatati*)

20.

Sandro Campigotto

Astragone Guarda, Dodo: ho trovato un sacchetto con quindici palline numerate da 1 a 15. Se ne tiro fuori quattro, qual è la probabilità che la loro somma sia multiplo di 3? [*Dare come risposta la probabilità moltiplicata per 10^4 .*]

21.

Silvia Sconza

Entra Il ragazzo, fa un inchino, inizia a parlare.

Il ragazzo Il signor Godol mi ha incaricato di informarvi che oggi non verrà e di lasciarvi questo orologio.

Teodomiro (*Prende l'orologio*) Le due lancette si muovono a scatti.

Il ragazzo Sì, la lancetta dei minuti si muove alla posizione successiva allo scoccare del minuto; la lancetta delle ore, quando la lancetta dei minuti supera la tacca del sessantesimo minuto, scatta alla posizione dell'ora successiva.

Astragone (*Interrompendo*) La lancetta delle ore usa solo 12 posizioni?

Il ragazzo (*Senza scomporsi*) Sì. (*Continua*) Però l'orologio batte i minuti in modo particolare: quando le lancette segnano le dodici in punto, dopo un minuto la lancetta dei minuti si sposta in avanti di una tacca per minuti, dopo un altro minuto reale scatta di due tacche per minuti, dopo un altro minuto scatta di tre tacche, e così via. Il signor Godol verrà quando le due lancette dell'orologio segneranno l'una precisa.

Teodomiro Vuoi dire che la lancetta delle ore è sulla tacca dell'una, la lancetta dei minuti su quella del sessantesimo minuto?

Il ragazzo Esattamente. (*Se ne va*)

Astragone Le lancette sono sulle dodici e l'orologio sta ticchettando. Tra quanti minuti reali le due lancette dell'orologio segneranno per la prima volta l'una precisa?



Gara di matematica a squadre femminili 2023

Soluzioni



**Università
di Genova**

Il solito, grande ringraziamento va a tutti coloro che quest'anno, con la solita, pura abnegazione, insieme a Sandro Campigotto, Carlo Càssola e Lorenzo Mazza, hanno contribuito a preparare i testi di gara: Annalisa Caviglia, Andrea Giusto, Matteo Littardi, Simone Muselli, Luca Renzi, Silvia Sconza, Anna Ulivi. Sono tutti ex-giocatori che hanno frequentato, o ancora frequentano, il corso di Laurea in Matematica dell'Università di Genova.

Soluzione del problema 1. Dato che $2023^2 = 7^2 \cdot 17^4$, i divisori positivi di 2023^2 sono 15; quelli interi 30. La risposta è 0030.

Soluzione del problema 2. $(30^2 - 2 \cdot 5^2) \text{ cm}^2 = 850 \text{ cm}^2$.



La risposta è 0850.

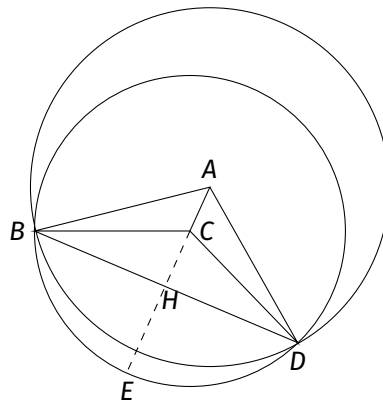
Soluzione del problema 3. Dato che $500 = 7 \cdot 71 + 3$, dopo che Astragone ha detto 497 Teodomiro dice 503. La risposta è 0504.

Soluzione del problema 4. Visto che gli addendi sono maggiori di 1, sono al massimo 5; in questo caso tutti gli addendi sono 2. Con quattro addendi uguali a 2, non si riesce a sommare 10. Con tre addendi uguali a 2, il quarto è 4 e si scrivono 4 somme. Con due addendi uguali a 2, si somma a 10 con altri due addendi uguali a 3 e scrivono 6 somme, oppure si somma a 10 con un altro addendo 6 e si scrivono 3 somme. Con un addendo uguale a 2, si somma a 10 con due addendi 3 e 5 (si scrivono 6 somme), con due addendi uguali a 4 (si scrivono 3 somme), con un addendo 8 (si scrivono 2 somme). La risposta è 0025.

Soluzione del problema 5. la salita è determinata univocamente da un sottoinsieme non vuoto e non massimo dell'insieme $\{1, \dots, 8\}$. La discesa è univocamente determinata di conseguenza. La risposta è 0254.

Soluzione del problema 6. $48^4 - 22^4 = 2^4(24^2 - 11^2)(24^2 + 11^2) = 2^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 41$. La risposta è 0041.

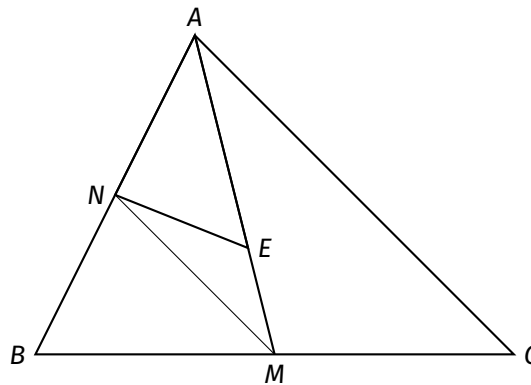
Soluzione del problema 7. I punti B e D sono i punti di intersezione della circonferenza di centro A con raggio AB e della circonferenza di centro C con raggio CB . I centri A e C stanno sull'asse di BD . Nel triangolo ABC l'altezza relativa alla base AC è il segmento BH .



L'area di ABC è $\sqrt{48 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 36} \text{ cm}^2 = 216 \text{ cm}^2$ grazie alla formula di Erone. Dunque $BH = \frac{2 \cdot 216}{12} \text{ cm} = 36 \text{ cm}$.
La risposta è 0072.

Soluzione del problema 8. Tra i 59 numeri della forma pq per $p + q = 2023 - 1 = 2022$, quello cercato è il più vicino al valore massimo del prodotto $p(2022 - p)$, che si ottiene per $p = 1011$ —che è divisibile per 3. Ma 1009 e 1013 sono primi. Il numero cercato è 1022117.
La risposta è 1022.

Soluzione del problema 9. L'area di ANM è $\frac{1}{4}$ di quella di ABC . L'area di ANE è $\frac{2}{3}$ di ANM .



L'area di ANE è $\frac{1}{6}$ dell'area di ABC .
La risposta è 0006.

Soluzione del problema 10. Chiamiamo x il prezzo (intero) del lancio e n il prezzo (intero) di listino. Si sa che

$$\frac{5}{6}n < x < n - \frac{16,6}{100}n = \frac{417}{500}n,$$

Quindi dalla prima disuguaglianza $5n < 6x$, pertanto $5n + 1 \leq 6x$. Confrontando primo e terzo membro della catena di disuguaglianze, $250 \cdot (5n + 1) < 417 \cdot 3n$, cioè $n > 250$.

Se $n = 251$ allora

$$\frac{5}{6}n = \frac{5}{6} \cdot 251 = 209,1\bar{6} \quad \text{e} \quad \frac{417}{500}n = \frac{417}{500} \cdot 251 = 209,334,$$

Se $n = 252$ allora

$$\frac{5}{6}n = \frac{5}{6} \cdot 252 = 210 \quad \text{e} \quad \frac{417}{500}n = \frac{417}{500} \cdot 252 = 210,168,$$

Se $n = 253$ allora

$$\frac{5}{6}n = \frac{5}{6} \cdot 253 = 210,8\bar{3} \quad \text{e} \quad \frac{417}{500}n = \frac{417}{500} \cdot 253 = 211,002,$$

Dunque il minimo prezzo normale è $n = 253$ (e $x = 211$).

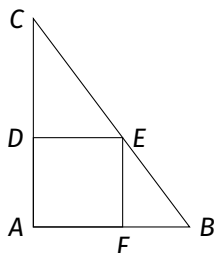
La risposta è 0253.

Soluzione del problema 11. Siano b cm e h cm le lunghezze intere di base e altezza di un rettangolo. Dalla condizione $bh = 2(b + h)$ si ha che $b(h - 2) = 2h$, in particolare $(h - 2) | 2h$. Così $3(h - 2) \leq 2h$ e $3 \leq h \leq 6$ (e simile per b). Inoltre $2 | bh$, cioè almeno uno dei due numeri è pari. Provando si trovano il rettangolo con $b = 3, h = 6$ e il quadrato con $b = h = 4$. La risposta è 0034.

Soluzione del problema 12. I numeri che rimangono scritti sono $1000 = 999 + 1, 1002 = 999 + 3, 1005 = 999 + 6, 1009 = 999 + 10, \dots$ Quindi dobbiamo trovare il più grande numero triangolare minore di $10000 - 999 = 9001$. Si calcola che $\sqrt{2 \cdot 9001} \approx 134,1$ e, in effetti, si vede che $\binom{134}{2} = 8911$. La risposta è 9910.

Soluzione del problema 13. Le triple (n, m, k) numeri interi positivi minori di 6, a due a due distinti, sono 60. Supponendo $n < m < k$, se la tripla consiste delle misure dei tre lati di un triangolo, deve essere $1 < n \leq 3$. Se $n = 2$ e $m = 3$, deve essere $k = 4$; se $n = 2$ e $m = 4$, allora $k = 5$. Se $n = 3$, allora $m = 4$ e $k = 5$. Le triple cercate sono le permutazioni di queste tre. La risposta è 3000.

Soluzione del problema 14. I triangoli ABC, DBE e FEC sono simili. Così $DB : EF = DE : CF$. Dato che $EF = DE$ si ha che l'area del quadrato è $DE^2 = DE \cdot EF = 112 \cdot 63 \text{ cm}^2 = 7056 \text{ cm}^2$.



La risposta è 7056.

Soluzione del problema 15. La potenza di p nella scomposizione del fattoriale $p^n!$ in fattori primi è $\sum_{i < n} p^i = \frac{p^n - 1}{p - 1}$. Infatti, è immediata per $n = 0$, e si nota che la potenza del fattore p nella scomposizione di $\frac{p^{n+1}!}{p^n!}$ è p^n . La potenza di 7 è 137256. La risposta è 1372.

Soluzione del problema 16. Servono soltanto valori delle funzioni g e f su argomenti naturali. L'unica funzione naturale di variabile naturale che verifica le condizioni di g è la funzione $\text{sgn} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ che restituisce il segno dell'argomento. L'unica funzione naturale di variabile naturale che verifica le condizioni di f è la funzione $\text{rst} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ che restituisce il resto della divisione del primo argomento con il secondo. Dunque $f(235, 532) + f(532, 235) = 235 + 62 = 297$. La risposta è 0297.

Soluzione del problema 17. Dato che la somma delle quattro radici è 0, la quarta radice è 8. Per il teorema di Ruffini, il polinomio è uguale a $(x - 8)(x + 1)(x + 3)(x + 4)$. Dunque $a = 45, b = -140$ e $c = -96$. La risposta è 2820.

Soluzione del problema 18. Dato che tutti i serpenti mentono sempre, ogni domanda fornisce informazione utile. La strategia è quella di dimezzare a ogni domanda il numero di animali che non sono carnivori. Ad esempio, si chiede all'animale 1 la seconda domanda con $n = 51$ e $m = 100$: se la risposta

è affermativa, il carnivoro si trova tra i primi 50, altrimenti è tra 51 e 100. Si continua dimezzando la differenza $m - n$ chiedendo sempre a animali nella metà sicuramente non carnivora per evitare la gestione del caso escludente. Così, la prima domanda riduce a 50 possibilità, la seconda a 25, la terza a 13 nel peggiore dei casi, così la quarta a 7, poi a 4, quindi a 2, infine a 1. La risposta è 0007.

Soluzione del problema 19. La scomposizione di un tetraedro di spigolo s richiede 4 tetraedri di spigolo $\frac{s}{2}$ e 1 ottaedro di spigolo $\frac{s}{2}$ (e il volume dell'ottaedro è 4 volte il volume del tetraedro con uguale spigolo). La scomposizione di un ottaedro di spigolo s richiede 8 tetraedri di spigolo $\frac{s}{2}$ e 6 ottaedri di spigolo $\frac{s}{2}$. Perciò,

$$T(s) = 4T\left(\frac{s}{2}\right) + O\left(\frac{s}{2}\right) \quad O(s) = 8T\left(\frac{s}{2}\right) + 6O\left(\frac{s}{2}\right)$$

dove le due funzioni indicano i valori di tetraedri e ottaedri dipendenti dalla dimensione dello spigolo. Servono quattro iterazioni dai valori iniziali $T(\ell) = 1$ e $O(\ell) = 0$ ottenendo la sequenza (4, 1), (24, 10), (176, 84) e (1376, 680).

La risposta è 1376.

Soluzione del problema 20. Chiaramente interessano i resti modulo 3 dei 15 numeri. Le somme di quadruple di resti che danno un multiplo di 3 possono avere le prime due componenti con resti uguali a somma 0, 1 e 2, ciascuna somma con probabilità $\frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} = \frac{2}{21}$, oppure con resti diversi a somma 0, 1 e 2, ciascuna somma con probabilità $2 \cdot \frac{5}{42}$.

In ciascun caso, la somma della coppia determina in modo unico la somma della coppia delle ultime due palline, sia quando le prime due componenti sono con resti uguali, sia negli altri casi. Perciò, la somma delle probabilità relative al caso con prime due componenti uguali è 1, come pure nell'altro caso.

Perciò la probabilità cercata è $\frac{2}{21} + 2 \cdot \frac{5}{42} = \frac{1}{3}$.

La risposta è 3333.

Soluzione del problema 21. Dopo n minuti reali l'orologio si sarà spostato avanti di $\frac{n(n+1)}{2}$ minuti. Dato che la lancetta delle ore funziona normalmente, la lancetta delle ore indica l'una ogni volta che lo spostamento della lancetta dei minuti supera i valori $60 + k720$ per $k = 0, 1, \dots$. Per avere la lancetta dei minuti che indica la tacca 12, deve essere $\frac{n(n+1)}{2} = 60 + k720$. Per $n = 11$ lo spostamento è 55, per $n = 12$ lo spostamento è 66; dunque la prima volta che la lancetta delle ore è sull'una quella dei minuti non è sul 12. Per $n = 39$ lo spostamento è 780, cioè per $k = 1$ (dopo 13 ore dall'accensione) le due lancette dell'orologio indicano l'una.

La risposta è 0039.

VII GARA A SQUADRE FEMMINILE (Sessione 2) (27/01/2023)

		D.1 41	D.2 29	D.3 28	D.4 35	D.5 60	D.6 36	D.7 42	D.8 69	D.9 49	D.10 138	D.11 76	D.12 71	D.13 60	D.14 30	D.15 58	D.16 122	D.17 42	D.18 93	D.19 122	D.20 94	D.21 83	
1	Leonardo* [Brescia]	1474	31	33	28	35	65	16	46	59	49	-30	76	86	75	68	58	142	22	101	132	99	73
2	Marconi [Carrara]	1295	39	29	28	35	50	56	42	79	69		96	154	68	45	78	-20	44	98		95	
3	Alessi [Perugia]	1156	21	19	28	45	66	36		89			76	71	62	30	58		42	226	-10		87
4	Calini [Brescia]	1101	61	29	28	25	80	41	44	84	49		76	74	60	50	48		64	-10	-10		98
5	Lioy [Vicenza]	1039	31	29	28	35	64	36	42	69			81	51	30	63			42			228	
6	Principe di Napoli [Assisi]	1027	-10	37	48	55	51	36	32	74	49		76	71	60	30			124	84			
7	Golgi [Breno]	957	37	49	28	35	63	36	42	75	64			122	60	30	64		42				
8	Vittorini [Milano]	951	36	30	28	25	50	26	42	70	49	-10		150		30	73		42			100	
9	Da Vinci [Jesi]	902	-10	29	28	-20		38	42	69	49		91		160		60		52			104	
10	Don Milani [Montichiari]	871	41	29	28	25	68	44		49	-10	78	71	60	60	-10			42				86
11	Grigoletti [Pordenone]	870	-20	29	28	35		36	42	69	49	-20		79	50	30	132		32	99		-10	
12	Alberghetti [Imola]	865	-20	29	28	15	70	51	42	71		-20		182	54	30	-10		50				83
13	Nievo [Padova]	774	-20	22	28	43	50	36	50		55		79	71		30			32	108			-20
14	Medi [Villafranca di Verona]	766	1		29	5		36	-10	69	57		-10	60	31	58			42			198	-10
15	Marzoli [Palazzolo sull'Oglio]	760	-40	29	28	35		40	43		49		76	71	50	76							93
16	Ariosto-Spallanzani [Reggio Emilia]	754	-20	29	28	15		26	57	69	52	-30	76		60	30	-10		64			98	
17	Moro [Reggio Emilia]	751	32	29	34	-10		42					71	65	30				42				206
18	Respighi [Piacenza]	743	-30	29	43	35		26		69			81	56		30						194	
19	Majorana [Desio]	740	-30	29	38	39		36	-10		49	-30	76		80	30			42	85		96	
20	Tron-Zanella [Schio]	732	35	44	28	15	60	-40	47	-10		-10	77	71	60	30	-10		70	-10		-20	85
21	Da Vinci [Treviso]	679	-20	29	28	-20	-10	42	-10	73			80	71	30	30	62		94			-10	
22	Galilei [Perugia]	675	13	29	28	35	60	46	62			-10	76		126	30			-10	-10			-10
23	Banfi [Vimercate]	675		39	28	35	62	36	42	-10	54			71		66			42				
24	Alighieri [Gorizia]	669		29	18	35	-10	26	42		49		76	142	-10	30			32				
25	Fanti [Carpi]	656		29	18	15	75	36	42	59				122	60								-10
26	Planck [Villorba]	635	-10	29	28	82	-20	36					76	51		30			42			-10	91
27	Roiti [Ferrara]	632	-40	29	28			26	42		49		76			30			-10	192			
28	Torricelli-Ballardini [Faenza]	630	31	29	28	35		26	42		-10		76	61		60			42				
29	Quadri [Vicenza]	615	-10	29	28	25	-10	36	42	-10	40	-20	-10	61	-10	30	116			-20			88
30	Galilei-Tiziano [Belluno]	610	-30	29	28	38		36	42				82	71	-10	30			84				
31	Marconi [Conegliano]	600	-40	29	28	35	-20	26	45	69	53			61	60	30			44			-20	-10
32	Galilei [Verona]	576	-10	34	28	-10	-10	-30		59	-20	76		60	30				72	97			-10
33	Gandhi [Narni]	569	-20	29	28	35	-20							60	35				38	-10		184	
34	Marconi [Foligno]	559	-10	29	28	5	-10	36	42		51		76		80				32				-10
35	Lussana [Bergamo]	547		29	56		-20	36	42	49				30			-30		42	103			
36	Newton [Camposampiero]	543	-60	70	33	25	-20	-10	42			-20	76	51		30			42				74
37	Antonietti [Iseo]	528	-30	29	28	35	60	37	-10					50	30								89
38	Torricelli [Maniago]	501		29	8	74		-10	42				76		30				42				
39	Frisi [Monza]	499	-20	29	31	35		36	42				84		30				42				-20
40	Dal Piaz [Feltre]	486	56	29	28	15	50	26							30				42				
41	Marconi [Parma]	477	-30	29	28	25		36						-10	-10	30	59		57	-10		-20	83
42	Copernico [Brescia]	476	-10	29	30			36	48		49				72				42	-10		-20	
43	Ulivi [Parma]	466	-30	19	18	35		36					72		64				42				
44	Bagatta [Desenzano del Garda]	465		29	28	80	-10	-20		72			76	-10	-10	20							
45	Da Ponte [Bassano del Grappa]	451	-20		28	35		-10		77		-10		73	66	30			42	-60			-10
46	Muratori - San Carlo [Modena]	439		29	28	35		36	-10					-10		60	61						
47	San Benedetto [Parma]	429	-30	29	28	35	-10		104						30				43				-10
48	Manzoni [Suzzara]	425	44	29	28	36	50	78	-10	-20		-20		-10	30				-10				-10
49	Mascheroni [Bergamo]	425		29	28			72					76		-10	30			-10				
50	Ariosto [Ferrara]	425		29	18	70		-20	-20			-10	76		30				42				
51	Russell [Guastalla]	415	31	19	18	35		72							30								
52	Galilei [Catania]	378	-20	29	18	35		-10	84										42		-10		
53	Leopardi-Majorana [Pordenone]	354	-30	31	56	35	-10	16	-10		-10		76	-10									
54	Pascal [Reggio Emilia]	328	-20	29	28	35	-10	26							30								
55	Colombini [Piacenza]	315	-20	29	18			36											42				
56	Di Savoia-Benincasa [Ancona]	314	-10	29	28	25		-10	42					-10	30								-20
57	Gioia [Piacenza]	312	-9	29	26	50			-10	-10		-60	76		30				-10				-10
58	Meneghini [Edolo]	302		9	36	15	-10	-20	42					-10						-20			-10
59	Vittorino Da Feltre [Feltre]	297	-20	29	28	50								-20		20							
60	Fermi [Paternò]	242		29	18	35		-10	-60		-10				30								
61	Amaldi [Alzano Lombardo]	210																					
62	Galileo Galilei [Erba]	210																					
63	Capirola [Leno]	201	-10	29	32	-20		-20							30		-40		-10				

VII GARA A SQUADRE FEMMINILE (Sessione 3) (27/01/2023)

		D.1	D.2	D.3	D.4	D.5	D.6	D.7	D.8	D.9	D.10	D.11	D.12	D.13	D.14	D.15	D.16	D.17	D.18	D.19	D.20	D.21	
1	Volta [Milano]	1794	141	30	49	38	131	54	55	109	216	-30	130	51	90	37	120						
2	Ferraris [Torino]	1166	130	30	29	40		47	55		101		110		95	29	290						
3	Cattaneo [Torino]	1078	152	30	29	40	-10	34	45		113		114	-10	-20	44			43		-20	284	
4	Dini [Pisa]	1039	-20	30	29	40	126	48	59	124	99	-10	110	85	76	33	-20		33	-30	-100		117
5	Romita [Campobasso]	989	156	30	19	40		45	61				110	67		29			94				128
6	Redi [Arezzo]	980	107	30	9	33	-10	59	55	129	103	-10		65		78			45	87			-10
7	Taramelli-Foscolo [Pavia]	927	-30	30	29	60	118	44	56		97		113		78	98			44			-10	-10
8	Amedeo di Savoia [Pistoia]	907	146	40	35	20		54		117	95	-10		65		29			126			-20	
9	Russell [Cles]	892	-20	50	39	40		34	45		96			65		31			43	144			115
10	Enriques Agnoletti [Sesto Fiorentino]	885	-30	33	29		-10	44			93		120			-10	140		86	76			104
11	Volta [Foggia]	821	128	30	32	40		44					116	75		30			116				
12	Livi [Prato]	754		30	31	30		44	50				110	146									103
13	Marconi [Foggia]	747	-40	30	29	40		44			94		118	160	-10	29			43				
14	Umberto I [Torino]	680	-30	38	29	40	-50	44	45							29			51				274
15	Gobetti [Torino]	643	-20	30	30	30	-10	44	70		-10		110	140		29				-10			
16	Lorenzini [Pescia]	640	-50	31	19	30		44	57		98		110			48			43				
17	Alberti [Cagliari]	636		30	29	40		44	55					-30									258
18	Darwin [Rivoli]	623	151	30	29	60	-30	29					111						33				
19	Spano [Sassari]	619	144	30	19		-10	42	-10					69	-10	29			106				
20	Città di Piero [Sansepolcro]	610		30	29	-30		-10	55			-40	125	-10		35				92			124
21	Saffo [Roseto degli Abruzzi]	609	-50	20	19	40		44						66									260
22	Curie [Pinerolo]	601	-50	20	37	30		34	55			-10			200	29			46				
23	Copernico [Prato]	596	129	45	33	50		44						-20	-10	29			86				
24	Galilei [Trento]	587	-20	30	29	40	122	-10					110	-10		29				77		-20	
25	Fermi [Nuoro]	573			44	40	124	34						55					66				
26	Fermi-Monticelli [Brindisi]	504		30	29	30			45				112			58				-10			
27	Cotta [Legnago]	475		30	29	40		50						116									
28	Mancini [Avellino]	450	-30	20	34	110		44	63				-10	-20		29							
29	Ribezzo [Francavilla]	446	-40	30	9	44	121						-10	-80					43				119
30	Gramsci [Firenze]	443		30	58	30	136							-20	-10	29				-20			
31	Agnelli [Torino]	382	-50	70	29	30		46						-10	-10	29	-10			38			
32	da Vinci [Firenze]	382	-20	34	29	40	110			-10				-10		29				-10			-20
33	Einstein [Torino]	378	-10	20	29	30		-10	110				-20			29			-10				
34	Valdese [Torre Pellice]	362		30	58	30		44															-10
35	Alfieri [Torino]	361		30	29	80	-10									32							-10
36	Pepe-Calamo [Ostuni]	354	-50	30	-11		119	44	-20				-10			19	-20		43				
37	Enriques [Castelfiorentino]	344		10	29								115							-10			-10
38	Berard [Aosta]	333	-10	30	19	40			75					-60		29							
39	Atzeni [Capoterra]	318	-10	36	29	40		34						-20		29				-20	-10		
40	Majorana [Torino]	317	-20	30	19	40						-20		-20						78			
41	Juvarra [Venaria Reale]	311		30	19	92								-10						-10	-10		-10
42	Copernico-Luxemburg [Torino]	310	-30	30	29	40	-20		-10					-10		38			43				-10
43	Petrarca [Arezzo]	309		30	29	62	-10	-10	48		-10		-20										-20
44	Amaldi [Carbonia]	293		30	29	30	-20	44	-10														-20
45	Curie [Collegno]	286		20	29	20	-40	14											33				
46	Majorana [Brindisi]	278		30	38	30	-10	-10							-10								
47	Grassi [Saronno]	274	-20	20	29	42	-10	44					-10			29	-20			-40			
48	Pontormo [Empoli]	267	-10	30	29	-10	-10	-10						-10		58							-10
49	Saluzzo - Plana [Alessandria]	259	-10	30	29	40				-20		-10											-10
50	Rummo [Benevento]	254	-40	30	29	45		-10						-10									
51	Marconi [Campobasso]	240		30	-10	80	-30	-10	-10		-10												-10
52	Pitagora [Selargius]	239		30	29	40		-10	-20											-20			-20
53	Galilei [Arezzo]	231	-30	22	29	20	-10					-10											
54	Ferdinando [Mesagne]	219	-20	30	29	10								-40									
55	Alfano da Termoli [Termoli]	210																					
56	Peano [Torino]	210																					
57	Lilla [Francavilla Fontana]	208		20	29	-10			-40					-10		29				-10	-10		
58	Rispoli - Tondi [San Severo]	202	-50	20	29	-20	-10			-20										43			
59	Pacinotti [Cagliari]	199	-20	30	29												-40			-10			
60	Giordano [Venafro]	189		20	-1	30	-40							-10									-20
61	Publio Virgilio Marone [Avellino]	100	-10	30	-20	-80	-20																-10
62	Buonarrati - Fossombroni [Arezzo]	69		30	19	-40	-10	-40	-40					-20		-10				-10	-10		-10