Università di Genova

Progetto Olimpiadi della Matematica

Unione Matematica Italiana

Ministero dell'Istruzione e del Merito

Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre. Si ricorda anche che occorre sempre e comunque compilare tutte le 4 cifre, eventualmente aggiungendo zeri iniziali.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera.
- Si ricorda che
  a) la *parte intera* di un numero reale x è il più grande intero minore o uguale ad x; si scrive $\lfloor x \rfloor$—ad esempio $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor 10 \rfloor = 10$, $\left\lfloor \sqrt{17} \right\rfloor = 4$;
  b) il *successivo* del numero intero n è il numero $n + 1$ e i due numeri sono detti *consecutivi*;
  c) il *fattoriale* del numero intero n è il prodotto di tutti i numeri interi da 1 fino a n; si scrive $n!$—ad esempio $1! = 1$, $5! = 120$, $6! = 720$;
  d) un *quadrato perfetto* è un numero intero che è quadrato di un numero intero—ad esempio 16 è un quadrato perfetto, 22 non è un quadrato perfetto;
  e) una lista è *palindroma* se, letta da destra a sinistra, produce la stessa lista—ad esempio `radar` è palindroma; `drone` non è palindroma; 2020 non è palindromo; 2002 è palindromo.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo oppure il problema non ha esattamente una soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, si indichino le ultime quattro cifre della sua parte intera—cioè, il resto della divisione con 10^4; in altre parole, in ordine da sinistra a destra, la cifra delle migliaia, seguita da quella delle centinaia, poi quella delle decine, infine le unità.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:
  $\sqrt{2} = 1{,}4142$ $\quad \sqrt{3} = 1{,}7321$ $\quad \sqrt{5} = 2{,}2360$ $\quad \pi = 3{,}1415$.

Aspettando Godol

Tragicommedia in due atti

da un'idea di Samuel Beckett(1)

Atto secondo

È pomeriggio, circa le due. Stessa strada di campagna del primo atto. Ci sono due stivali sul bordo. Entra Teodomiro agitato. Si ferma e inizia a cantare..

Teodomiro Dove sei, Gogo?
Astragone (*Uscendo da dietro l'albero*) Sono qui.
Teodomiro Che cosa ti šuccesso?
Astragone Niente.
Teodomiro Ma ti hanno picchiato! Chi è stato?
Astragone Non lo so. Era buio. Non voglio pensarci.
Teodomiro Invece bisogna pensarci. Ne va del nostro destino. E la sola possibilità per prevedere qualcosa di sensato per il futuro è conoscere bene la nostra matematica.
Astragone La mia? O la tua?
Teodomiro Tutte. Se fatte con la dovuta cura, tutte servono.

(1) L'autore di un problema è indicato prima del testo.

Università di Genova
3 marzo 2023

Unione Matematica Italiana

Gara a Squadre Miste – Testi dei problemi

Ministero dell'Istruzione e del Merito

1. *Carlo Càssola*

Teodomiro Mentre venivo, contavo i numeri palindromi di sette cifre.

Astragone Quanti sono?

2. *Lorenzo Mazza*

Astragone Ho disegnato un triangolo con un lato di 10 cm e l'altezza ad esso relativa di 6 cm. Ho anche trovato il suo baricentro.

Teodomiro Indica i vertici del triangolo con X, Y e Z, il baricentro con B. Traccia la parallela per B al lato più lungo YZ. Diciamo che V e W sono le intersezioni con i lati. Qual è il rapporto fra l'area del triangolo XVW e quella del trapezio $YZVW$?

[*Dare come risposta il rapporto moltiplicato per* 10^4.]

3. *Sandro Campigotto*

Teodomiro Qual è il più grande valore di n per cui $\dfrac{2023!}{(10!)^n}$ è un numero intero?

4. *Sandro Campigotto*

Astragone Non so che cosa fare.

Teodomiro Aspettiamo.

Astragone Chi?

Teodomiro Godol, chi altri?

Astragone Per passare il tempo diciamo numeri?

Teodomiro Va bene.

Astragone Io inizio con 1 e aggiungo sempre 2.

Teodomiro Io inizio da 10000 e sottraggo sempre 7.

Astragone Uno, tre, cinque,

Teodomiro (*Scandendo numero a numero con Astragone*) Diecimila, novemilanovecentonovantatre, novemilanovecentoottantasei, (*Alza la mano, urlando*) Fermo! A un certo momento diremo lo stesso numero!

Astragone Quale?

5. *Sandro Campigotto*

Astragone Guarda, Dodo: ho trovato un sacchetto con sedici palline numerate da 15 a 30. Se ne tiro fuori due, qual è la probabilità che il loro prodotto sia multiplo di 6?

[*Dare come risposta la probabilità moltiplicata per* 10^4.]

6. *Carlo Càssola*

Teodomiro Disegna un ottagono $ABCDEFGH$ che abbia i lati opposti a due a due paralleli e uguali.

Astragone (*Si mette al lavoro con cura*) Ho misurato i lati che ho disegnato

$AB = EF = 30\,\text{cm}$, $BC = FG = 10\sqrt{10}\,\text{cm}$,

$CD = GH = 10\,\text{cm}$, $DE = HA = 10\sqrt{2}\,\text{cm}$.

Teodomiro Non ci credo! $ABEF$ è un rettangolo. E anche: prolungando i lati AB, CD, EF e GH ottieni un quadrato! Quanto vale l'area dell'ottagono in cm^2?

7. *Sandro Campigotto*

Astragone Stavo pensando.

Teodomiro A cosa?

Astragone Quante triple ordinate (a, b, c) di numeri interi sono tali che $abc = 2023$?

8. *Lorenzo Mazza*

Astragone Ricordo dieci scatole contenenti biglie di colore rosso, nero, giallo e verde. Sapevo che il numero di biglie rosse in ciascuna scatola coincideva con il numero di biglie nere nelle rimanenti nove scatole; il numero di biglie nere in ciascuna scatola coincideva con il numero di biglie gialle nelle rimanenti nove scatole; il numero di biglie gialle in ciascuna scatola coincideva con il numero di biglie verdi nelle rimanenti scatole.

Teodomiro Ma erano un numero esagerato di biglie?

Astragone Sì, ricordo che erano proprio tante! E il numero totale di tutte le biglie nelle scatole era un multiplo di 6. Qual era il numero minimo di biglie in una scatola?

9. *Carlo Càssola*

Teodomiro All'interno della base AB di un triangolo equilatero ABC disegna il punto D tale che $AD = 3DB$. Sulla semiretta di origine C e passante per D fissa il punto E in modo che sia $CE = AB$. Quanto è l'ampiezza in gradi di $A\hat{E}B$?

10. *Sandro Campigotto*

Astragone Ho scritto cinque numeri naturali.
Teodomiro Ce ne sono due uguali?
Astragone No. La media dei due più piccoli è 100. La media dei due più grandi è 200. La media dei cinque numeri è un numero intero. Quali sono il più piccolo e il più grande valore possibile del numero più grande tra i cinque? [*Dare come risposta la somma dei due valori.*]

11. *Sandro Campigotto*

Astragone Ho disegnato tre cerchi concentrici di aree $400\pi\,\mathrm{cm}^2$, $600\pi\,\mathrm{cm}^2$ e $800\pi\,\mathrm{cm}^2$.
Teodomiro Che cos'è P-greco?
Astragone È 3,1415926535897 (*Teodomiro agita le mani e interrompe Astragone*).
Teodomiro Va bene; ho capito!
Astragone (*Riprendendo quello che diceva*) Dicevo: e $800\pi\,\mathrm{cm}^2$. Da un punto del cerchio di raggio maggiore ho tracciato tutte le tangenti agli altri due cerchi. Quanto vale il più piccolo tra tutti gli angoli formati da coppie di tangenti?

12. *Sandro Campigotto*

Teodomiro Guarda, Gogo! Ho trovato un sacchetto con 23 monete. Sono tutte della stessa grandezza e peso; tutte con testa e croce, esclusa una che ha testa su entrambi i lati.
Astragone Ho paura, Dodo. Sicuramente il baro che ha perso il sacchetto starà cercandolo.
Teodomiro Il sacchetto era per terra, nessuno lo reclama: è mio. (*Teodomiro prenda una moneta a caso. La lancia due volte.*) Che strano! In entrambi i lanci è venuto testa e non ho guardato che cosa c'era sull'altro lato della moneta.
Astragone Qual è la probabilità che la moneta presa sia la moneta con due teste?
[*Dare come risposta la probabilità moltiplicata per* 10^4.]

13. *Simone Muselli*

Teodomiro Immagino un'isola abitata da cifre, ci sono zeri, uni, due, tre, fino a tanti nove, con gambe, braccia, bocca. Sono tutti sinceri, eccetto gli zeri, che mentono sempre. Quattro cifre, sedute una accanto all'altra stanno formando un numero intero maggiore di 999. Iniziano a parlare, dicendo tutte la stessa frase:

> «Se me ne andassi, le cifre rimanenti formerebbero un numero di tre cifre, divisibile per 7 e per 11.»

Qual è il numero che le quattro cifre stanno formando?

14. *Giuseppe Rosolini*

Teodomiro Il numero di quattro cifre n è il prodotto di tre numeri primi diversi. Sottraendo n alla somma dei divisori di n si ottiene 2074.
Astragone Non basta per sapere quanto vale n.
Teodomiro Non mi interessa n. Mi interessa la somma dei tre numeri primi: qual è il suo valore minimo?

15. *Lorenzo Mazza*

Astragone Che cosa succede?
Teodomiro Sto pensando.
Astragone No, Dodo, guarda là fuori. Sta arrivando qualcuno.
Teodomiro Cercavo di ricordare i divisori di $11^6 - 1$.
Astragone (*Entrano Lozzo e Pucky, la corda è corta, Lozzo si muove a tentoni*) Ci sono quei due di ieri.
Teodomiro Chissà quanti sono i divisori che cercavo?

16. *Lorenzo Mazza*

Lozzo Immagino anche un poligono convesso di 2023 lati in cui sono tracciate tutte le diagonali. E immagino una retta che interseca il poligono e le diagonali, (*si infervora*) senza passare per alcun vertice del poligono stesso. (*Calmandosi*) Qual è il massimo numero possibile di intersezioni tra le diagonali e la retta che si possono immaginare?

17. *Simone Muselli*

Teodomiro Ti racconto una storia (*Rivolto a Lozzo che guarda avanti*) Nella lontana isola di Barus, vivono 2023 abitanti di due tipi: gli Onesti, che dicono sempre la verità, e i Bari, che dicono sempre il falso, e cercano di non farsi scoprire. A causa di una grande festa, tutti gli abitanti dell'isola si sono riuniti nella piazza centrale. Ad un certo punto, uno dice ad un altro: "Sei un Baro!". L'altro gli risponde: "Ah sì? Se io sono un Baro, allora tu sei un Baro!". Gli abitanti cominciano ad accusarsi a vicenda finchè tutti non hanno detto a tutti la frase "Se io sono un Baro, allora tu sei un Baro!".
Lozzo Quanti sono gli Onesti dell'isola?

18. *Lorenzo Mazza*

Lozzo (*Parlando tra sé*) Quanti sono quei quadrati perfetti tali che, calcolandone il quoziente nella divisione con 100, si ottiene il prodotto di due interi positivi consecutivi minori di 100? (*Tira la corda*) Andiamo,Pucky! (*Esce con Pucky, si sentono rumori di caduta*)

19.

Simone Muselli

Astragone (*Salutando in direzione di Lozzo e Pucky*) Ho inventato un gioco che possiamo giocare domani se non viene Godol.
Teodomiro Verrà di sicuro!
Astragone Vorrei avere le tue certezze! È così che avrei voluto affrontare la vita. Per il gioco, ho disegnato un quadrato di lato 5 dm sul ghiaccio del lago. Ad una distanza di 1 m da esso, si lancia, facendolo scivolare, un disco di 10 cm di raggio. Se il disco, una volta fermo, si trova almeno in parte sopra al quadrato, allora il lancio viene considerato *valido*; se si trova interamente all'interno del quadrato, si vince.
Teodomiro Ma è facilissimo!
Astragone Vorrei avere le tue certezze. Purtroppo a volte il tiro è lungo, altre volte corto, altre ancora troppo largo a sinistra, poi troppo largo a destra. Io mi impegno, ma praticamente è come se ogni volta lanciassi il disco a caso verso un punto qualsiasi del lago.
Teodomiro In queste condizioni casuali, qual è la probabilità di vittoria a seguito di un lancio valido?
[*Dare come risposta la probabilità moltiplicata per* 10^4.]

20.

Simone Muselli

Astragone Ricordo ancora quando ero presentabile e mi avevano chiamato per ricoprire un pavimento rettangolare con 45 piastrelle a quattro lati e ad angoli retti. Pensa che le piastrelle avevano misure in dm dei lati tutte intere, da 1 a 9. Puoi non crederci: le piastrelle erano tutte diverse.
Teodomiro Quanti decimetri misurava il perimetro del pavimento?
[*Dare come risposta il massimo valore possibile del perimetro.*]

21.

Damiano Poletti

Entra Il ragazzo, fa un inchino, inizia a parlare.
Il ragazzo Il signor Godol mi ha incaricato di informarvi che oggi non verrà.
Teodomiro Ti ho già visto?
Il ragazzo Non credo, signore.
Teodomiro Eri qui ieri?
Il ragazzo No, signore.
Teodomiro Eppure mi sembri proprio di averti visto. Tu te lo ricordi, Gogo?
Astragone Mi pare; forse è il fratello.
Teodomiro È venuto tuo fratello ieri?
Il ragazzo Non lo so, signore. Il signor Godol mi ha detto di spiegarvi come funziona il faro sull'isola nel lago. Il lago ha la forma di un pentagono regolare e nel suo circocentro è posto un faro. La luce del faro illuminerebbe contemporaneamente in tutte le direzioni, ma attorno alla sorgente luminosa sono posti due scudi cilindrici coassiali. Ciascuno scudo blocca la luce, escluso per una opportuna fenditura verticale che permette il passaggio della luce. Ciascuno scudo ruota in senso orario attorno alla sorgente: nel tempo in cui lo scudo esterno compie un giro completo, quello interno ne compie quattro. In questo modo guardando il faro si alternano momenti in cui si vede la luce e altri in cui invece la luce è oscurata. Più precisamente, dal vertice Nord del lago, aprendo gli occhi in un momento a caso, si avrebbe probabilità di $\frac{3}{8}$ di riuscire a vedere la luce; dal successivo vertice in senso orario questa probabilità sarebbe $\frac{11}{40}$; dal successivo ancora di $\frac{3}{8}$; dagli ultimi due vertici invece la probabilità sarebbe la stessa.
Teodomiro Ecco perché Godol non viene a incontrarci. Quanto vale quindi la probabilità che da uno degli ultimi due vertici, aprendo gli occhi in un momento a caso, si riesca a vedere la luce? (*Il ragazzo esce*)
[*Dare come risposta la probabilità moltiplicata per* 10^4.]

Gara di matematica a squadre miste 2023
Soluzioni

Università di Genova

Soluzione del problema 1. L'unica condizione sulle prime quattro cifre è che la prima non sia 0. Le altre tre sono univocamente determinate dalle prime quattro.
La risposta è 9000.

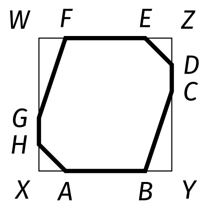
Soluzione del problema 2. Il baricentro divide la mediana in due parti, una il doppio dell'altra. Così $\frac{VW}{YZ} = \frac{2}{3}$. L'area del triangolo XVW è $\frac{4}{9}a$ e l'area del trapezio $YZWV$ è $a - \frac{4}{9}a = \frac{5}{9}a$.
La risposta è 8000.

Soluzione del problema 3. La fattorizzazione di 10! è $2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^1$. Nella fattorizzazione di (2023)! il primo 2 ha potenza 2014, il primo 3 ha potenza 1006, il primo 5 ha potenza 503 e il primo 7 ha potenza 335. Perciò la massima potenza è $\min\left\{\left\lfloor\frac{2014}{8}\right\rfloor, \left\lfloor\frac{1006}{4}\right\rfloor, \left\lfloor\frac{503}{2}\right\rfloor, 335\right\} = 251$.
La risposta è 0251.

Soluzione del problema 4. Si considera l'equazione $1 + 2x = 10^4 - 7x$, da cui $x = \frac{10^4-1}{9} = 1111$.
La risposta è 2223.

Soluzione del problema 5. Chiaramente interessano i resti modulo 6 dei 16 numeri. I multipli di 2 compresi tra 15 e 30 sono 8; i multipli di 3 sono 6; i multipli di 6 sono 3. Per ogni multiplo di 6 ci sono 15 palline che danno resto 0; per ogni multiplo di 2 che non è multiplo di 3 ci sono 6 palline appropriate; per ogni multiplo di 3 che non è multiplo di 2 ci sono 8 palline appropriate. Il totale è $3 \cdot 15 + 5 \cdot 6 + 3 \cdot 8 + 5 \cdot 3 = 114$. Le coppie totali sono 240.
La risposta è 4750.

Soluzione del problema 6. Sia $XYZW$ il quadrato che si ottiene, sia $XY = q$ la lunghezza del lato. Siano $a = BY$ e $b = YC$. Deve essere $2a + 30 = a + b + 10$ e $2a^2 = 200$. Perciò $a = 10$ e $b = 30$. L'area è $(50^2 - 100 - 300)\,\text{cm}^2 = 2100\,\text{cm}^2$.



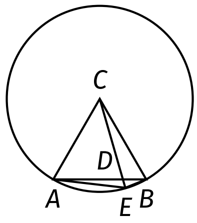
La risposta è 2100.

Soluzione del problema 7. La scomposizione in fattori primi di 2023 è $7 \cdot 17^2$. Dunque per determinare una tripla come richiesto, basta fissare due divisori di 2023 del tipo $(-1)^{k_1}7^{n_1^{(i)}}(-1)^{k_2}17^{n_2^{(i)}}$ con $k_j = 0, 1$, $n_1^{(i)} = 0, 1$ e $n_2^{(i)} = 0, 1, 2$ e tali che $n_1' + n_1'' \le 1$ e $n_2' + n_2'' \le 2$. Le coppie (n_1', n_1'') sono 3, le coppie (n_2', n_2'') sono 6,
La risposta è 0072.

Soluzione del problema 8. Si nota che la somma delle biglie di un colore e del successivo nella lista (verde, giallo, nero, rosso) è lo stesso per tutte le scatole, dato che, indicati con x_i il numero di biglie nella scatola i di colore x e con x' il colore successivo a x, le condizioni impongono che $x_i' + x_i = \left(\sum_{k=1}^{10} x_i\right)$. Dato che c'erano biglie nelle scatole, ci deve essere almeno una biglia verde in una scatola. Siano k le biglie verdi in una scatola, ce ne sono 0 nelle altre. Il numero di biglie gialle è k nelle scatole con 0 biglie verdi e 0 in quella con k biglie verdi. Perciò quello di biglie nere è $9k$ nella scatola con 0 biglie gialle (e k biglie verdi), dunque $8k$ nelle altre. Quello di biglie rosse è $72k$ nella scatola con $9k$ biglie nere (e 0 biglie gialle e k biglie verdi) e $73k$ nelle altre.
Il numero di biglie è $82k$ a partire da k biglie verdi; visto che $\text{mcd}(82, 6) = 3$ il numero minimo richiesto è 246 che si ottiene anche partendo da una distribuzione di una biglia verde in tre scatole, e nessuna biglia verde nelle altre.

La risposta è 0246.

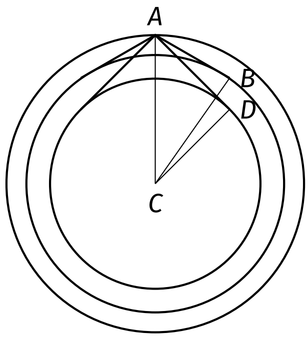
Soluzione del problema 9. Dato che $CE = AB = AC = BC$ i punti A, B e E sono sulla circonferenza di centro CC e raggio AC. L'angolo $A\hat{E}B$ è supplementare all'angolo alla circonferenza che insiste sull'arco AB su cui insiste l'angolo al centro $A\hat{C}B$.



La risposta è 0150.

Soluzione del problema 10. Siano $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ con $\frac{a_1+a_2}{2} = 100$ e $\frac{a_4+a_5}{2} = 200$. Dunque $101 < a_3 < 199$. Si ha che $\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{5} = \frac{600+a_3}{5}$. Dunque a_3 deve essere multiplo di 5. Il minimo per a_3 è 105, il massimo è 195. Dunque a_4 vale come minimo 106 e $a_5 = 400 - 106 = 294$, come massimo 199 e $a_5 = 201$.
La risposta è 0495.

Soluzione del problema 11. I raggi $r_1 > r_2 > r_3$ sono legati dalle relazioni $r_2 = \frac{r_1\sqrt{3}}{2}$ e $r_3 = \frac{r_1}{\sqrt{2}}$. Se B e D sono i punti di contatto delle tangenti, AC è la diagonale del quadrato di lato AD e il lato del triangolo equilatero con semibase AB. Perciò gli angoli sono tutti noti e il più piccolo è $B\hat{A}D$.



La risposta è 0015.

Soluzione del problema 12. La probabilità che il lancio dia testa $l = T$ condizionatamente alla scelta della moneta con due teste $m = T$ è $p(l = T|m = T) = \frac{p(l=T \wedge m=T)}{p(l=T \wedge m=T)+p(l=T \wedge m \neq T)} = \frac{\frac{1}{23}}{\frac{1}{23}+\frac{22}{23}\cdot\frac{1}{4}} = \frac{2}{13}$.
La risposta è 1538.

Soluzione del problema 13. Siano a, b, c e d le quattro cifre, da quella delle migliaia a quella delle unità. Allora $a \neq 0$. Siccome $a \neq 0$, essa dice la verità; in particolare, $b \neq 0$. Per il criterio di divisibilità per 11, la frase detta da a implica che

$$c = b + d \qquad \text{oppure} \qquad 11c = b + d,$$

Analogamente, la frase detta da b implica che

$$c = a + d \qquad \text{oppure} \qquad 11c = a + d,$$

Se $11c = b + d$ e $c = a + d$, allora $10c + a = b$, assurdo. Analogamente non è possibile che $c = b + d$ e $11c = a + d$. Allora

$$c = b + d \quad \text{e} \quad c = a + d, \qquad \text{oppure} \qquad 11c = b + d \quad \text{e} \quad 11c = a + d,$$

In entrambi i casi $a = b$ e $c \neq 0$. Allora la frase detta da b implica che $d = 0$, sempre per il criterio di divisibilità per 11. Quindi da sopra, $c = b = a$. Ma allora $a = b = c = 7$ per quanto detto da a, b, e c. In effetti, si verifica che il numero 7770 verifica le proprietà richieste. La risposta è 7770.

Soluzione del problema 14. Siano $p_1 < p_2 < p_3$ primi con $n = p_1p_2p_3$. Dato che $2073 = p_2(1 + p_1 + p_3) + p_1(1 + p_3) + p_3$, p_1 è pari, cioè $p_1 = 2$. Dato che $\frac{n}{2} < \frac{10^4}{2} < 71^2$, $p_2 \leq 71$. Ora $2073 = 3(1 + p_2 + p_3) + p_2p_3$ e $p_2 + p_3 = \frac{2071 - p_2p_3}{3}$. Il valore minimo di $p_2 + p_3$ corrisponde al valore massimo di p_2p_3 (e anche di n). Le tre coppie di valori sono $(5, 257)$, $(13, 127)$ e $(17, 101)$.
La risposta è `0120`.

Soluzione del problema 15. Risulta $11^6 - 1 = (11^3 - 1)(11^3 + 1) = (11 - 1)(121 + 1 + 11)(11 + 1)(121 + 1 - 11) = 10 \cdot 133 \cdot 12 \cdot 111 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 37$, da cui il numero di divisori è $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 192$.
La risposta è `0192`.

Soluzione del problema 16. Siano x e y i numeri di vertici del poligono che si trovano nei due semipiani opposti generati dalla retta, così che $x + y = 2023$. Il numero di intersezioni della retta con le diagonali è $xy - 2$, dato che la retta interseca due lati del poligono. Il prodotto tra due numeri a somma costante è massimo per $x = \lfloor \frac{2023}{2} \rfloor, \lceil \frac{2023}{2} \rceil$. Dunque il numero massimo di intersezioni è $1011 \cdot 1012 - 2 = 1023132 - 2 = 1023130$.
La risposta è `3130`.

Soluzione del problema 17. Iniziamo notando che la negazione della frase "Se io sono un Baro, allora tu sei un Baro" è "Io sono un Baro e tu sei un Onesto". Chiamiamo A e B il primo e il secondo abitante che parlano.
Se A è un Baro, allora B è un Onesto. Inoltre siccome A rivolge la frase "Se io sono un Baro, allora tu sei un Baro" a tutti gli abitanti e lui è un Baro, tutti gli altri abitanti sono Onesti. Per notare che questa configurazione è accettabile basta notare che la frase "Se io sono un Baro, allora tu sei un Baro" detta da un Onesto non implica nulla. In questo caso quindi ci sono 2022 Onesti.
Se A è un Onesto, allora B è un Baro. Per lo stesso ragionamento di prima, ma su B invece che su A, segue che gli Onesti sono ancora una volta 2022.
La risposta è `2022`.

Soluzione del problema 18. I quadrati perfetti cercati dovranno essere compresi fra $100n(n+1)$ e $100n(n+1) + 99$. Se $n = 1$ i quadrati perfetti compresi fra 200 e 299 sono 3 (i quadrati di 15, 16 e 17); se $n = 2$ i quadrati perfetti compresi fra 600 e 699 sono 2 (i quadrati di 25 e 26); se $n = 3$ i quadrati perfetti compresi fra 1200 e 1299 sono 2 (i quadrati di 35 e 36). Per $3 < n \leq 98$ si ha un solo quadrato perfetto, ed è del tipo $(10n + 5)^2 = 100n(n + 1) + 25$ dato che il quadrato perfetto precedente $(10n + 4)^2 < 100n(n + 1)$ e quello successivo $(10n + 6)^2 > 100n(n + 1) + 99$.
La risposta è `0102`.

Soluzione del problema 19. Risolviamo il problema sul piano, considerando quindi il disco come un cerchio γ di raggio $r = 1\,\mathrm{dm}$. Sia O il centro di tale cerchio. Per vincere, O si deve trovare all'interno di un quadrato di lato $3\,\mathrm{dm}$, avente quindi area $3^2\,\mathrm{dm}^2 = 9\,\mathrm{dm}^2$. Perché il lancio effettuato sia considerato valido invece, il centro O si deve trovare all'interno di una figura geometrica di area $(7^2 - 4 + \pi)\,\mathrm{dm}^2 = (45 + \pi)\,\mathrm{dm}^2$. Pertanto la probabilità richiesta è $\dfrac{9}{45 + \pi}$.
La risposta è `1869`.

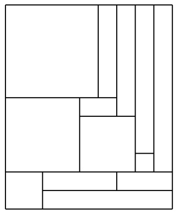
Soluzione del problema 20. Siccome le piastrelle sono tutte diverse e sono $45 = 1 + 2 + \cdots + 9$, esse corrispondono a tutti i possibili rettangoli aventi come lati numeri naturali da 1 a 9. La somma delle loro aree, che è uguale all'area del pavimento, vale

$$\frac{45 \cdot 45 + \sum_{n=1}^{9} n^2}{2} = \frac{2025 + 285}{2} = 1155 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11,$$

Per massimizzare il perimetro del pavimento dobbiamo minimizzare la lunghezza di uno dei suoi lati. Ma siccome una delle piastrelle misura 9×9 non è possibile che uno dei lati del pavimento sia minore di 10. Dalla fattorizzazione dell'area notiamo quindi che il perimetro massimo si avrebbe quando uno dei lati misura $11\,\mathrm{dm}$ e l'altro $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105\,\mathrm{dm}$. Rimane da verificare che un tale rettangolo sarebbe effettivamente piastrellabile con le piastrelle a disposizione.

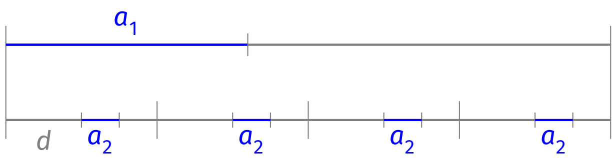
a) Le piastrelle di larghezza 2 dm e 9 dm e lunghezza dai 3 ai 9 dm, possono essere utilizzate per coprire un rettangolo largo $2 + 9 = 11\,\mathrm{dm}$ e lungo $3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 42\,\mathrm{dm}$, ponendo due piastrelle di stessa lunghezza adiacenti.
b) Le piastrelle di larghezza 3 dm e 8 dm e lunghezza dai 4 ai 8 dm, possono essere utilizzate per coprire un rettangolo largo $3 + 8 = 11\,\mathrm{dm}$ e lungo $4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 30\,\mathrm{dm}$, ponendo due piastrelle di stessa lunghezza adiacenti.

c) Le piastrelle di larghezza 4 dm e 7 dm e lunghezza dai 5 ai 7 dm, possono essere utilizzate per coprire un rettangolo largo 4+7 = 11 dm e lungo 5+6+7 = 18 dm, ponendo due piastrelle di stessa lunghezza adiacenti.
d) Le piastrelle di larghezza 5 dm e 6 dm e lunghezza 6 dm, possono essere utilizzate per coprire un rettangolo largo 5 + 6 = 11 dm e lungo 6 dm, ponendo le due piastrelle adiacenti.
e) Con le piastrelle restanti copriamo l'area restante come in figura:

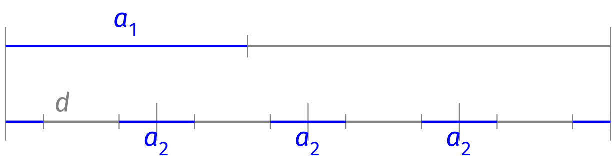


La risposta è 0232.

Soluzione del problema 21. Per semplicità supponiamo che lo scudo esterno impieghi 1 per compiere un giro completo e di conseguenza lo scudo interno impieghi $\frac{1}{4}$. In questo modo, per calcolare la probabilità di riuscire a vedere la luce da una qualsiasi delle postazioni, è sufficiente contare per quanto tempo essa è visible nell'arco di tempo in cui lo scudo esterno compie un giro.
Per trattare il problema ci concentriamo innanzitutto sul vertice Nord e misuriamo alcune quantità come se guardassimo da quel punto. Chiamiamo a_1, a_2 il tempo per cui gli scudi esterno e d interno, rispettivamente, lasciano passare la luce del faro ad ogni loro giro. Analogamente chiamiamo d il tempo che passa tra il passaggio dell'inizio della fenditura esterna e del primo passaggio dell'inizio della fenditura interna (anche se questo fosse oscurato dallo scudo esterno). Queste informazioni possono essere rappresentate come nel seguente grafico.



La linea blu rappresenta gli istanti in cui ciascuno scudo lascerebbe passare la luce verso il vertice Nord, rappresentato nel corso di una rivoluzione completa dello scudo esterno. La risposta al problema consiste nel trovare la lunghezza dei tratti in cui entrambe le linee sono blu. Un caso degno di nota corrisponde al grafico

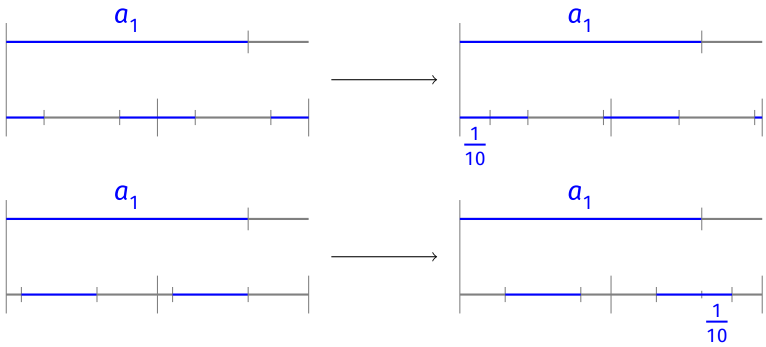


in cui quando l'inizio della fenditura esterna passa davanti alla postazione si è già anche in corrispondenza della fenditura interna.
Spostando il punto di vista dal vertice Nord al successivo (o dal successivo a quello dopo ancora), le misurazioni a_1, a_2 non vengono alterate, cambia però la posizione reciproca delle fenditure, e quindi la misurazione di d. Infatti possiamo cominciare a tracciare il grafico per il vertice successivo nel momento in cui l'inizio della fenditura esterna lo raggiunge (esattamente come fatto per il primo vertice). Nell'istante in cui questo accade, lo scudo interno ha effettuato solo $\frac{4}{5}$ di giro ed è quindi in "ritardo" di $\frac{1}{10}$: il tempo che serve allo scudo interno per compiere $\frac{2}{5}$ di giro ($\frac{1}{5}$ per completare il primo giro e $\frac{1}{5}$ per raggiungere il vertice successivo). Se chiamiamo d_n la misurazione della quantità d dal n-esimo vertice, dove $d_1 = d$ è quella dal vertice Nord, la formula che lega d_n con d_{n+1} è

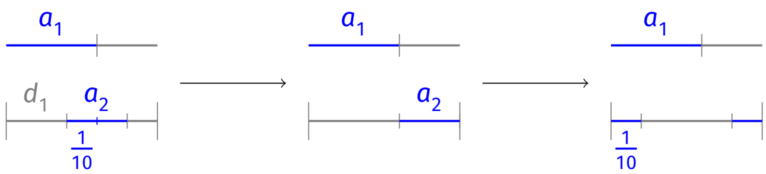
$$d_{n+1} = \begin{cases} d_n + \frac{1}{10}, & d_n + \frac{1}{10} \leq \frac{1}{4} \\ d_n - \frac{3}{20}, & d_n + \frac{1}{10} > \frac{1}{4} \end{cases}$$

Equivalentemente, l'effetto del passaggio tra il punto di vista di un vertice e il successivo può essere espresso come una traslazione della linea inferiore del grafico in avanti di $\frac{1}{10}$.

L'osservazione appena fatta comporta che tra una postazione e l'altra, la lunghezza dei tratti in cui entrambe le linee sono blu può variare, in positivo o in negativo, al massimo di $\frac{1}{10}$, che corrispondono alle seguenti situazioni, rispettivamente,



In parole povere, tra un vertice e il successivo la probabilità di vedere la luce diminuisce di una quantità pari alla lunghezza delle linea blu della riga inferiore che "esce" da quella superiore, mentre aumenta di quella che "entra" da sinistra.
I dati del problema dicono che tra il vertice Nord e il successivo la probabilità diminuisce esattamente di $\frac{1}{10}$ e successivamente invece aumenta esattamente di $\frac{1}{10}$. Questo vuol dire che la successione dei grafici, a partire dal vertice Nord, può solo essere di questo tipo:



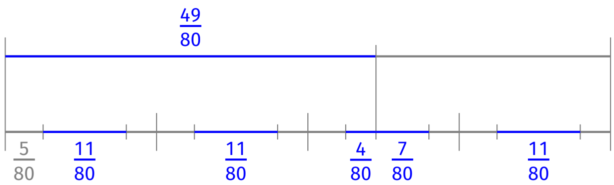
In particolare tra il vertice Nord e il successivo la linea blu "esce" soltanto, mentre per il successivo ancora "entra" solamente. L'unico dato che non è leggibile dai grafici precedenti è su quale delle rivoluzioni dello scudo interno abbiamo ingrandito. Sia allora $k \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{k}{4} \leq a_1 < \frac{k+1}{4}$. Da ciascuno dei grafici precedenti ricaviamo un'equazione, che raccogliamo nel seguente sistema

$$\begin{cases} a_1 = \frac{k}{4} + d_1 + \frac{1}{10} \\ a_1 + a_2 = \frac{k+1}{4} \\ \frac{3}{8} = ka_2 + \frac{1}{10} \end{cases}$$

Osserviamo infine che $a_2 \leq \frac{1}{4}$, dove l'uguaglianza corrisponde al caso in cui lo scudo interno è completamente aperto, mentre $a_2 \geq \frac{1}{10}$, altrimenti non potrebbe esserci una variazione di $\frac{1}{10}$ tra un vertice e il successivo, per l'osservazione sui grafici precedenti. Alla luce di questo, l'unica soluzione accettabile per la terza equazione si ha per $k = 2$ che corrisponde a

$$\begin{cases} k = 2 \\ a_2 = \frac{11}{80} \\ a_1 = \frac{49}{80} \\ d_1 = \frac{1}{80} \end{cases}$$

Questo vuol dire che $d_4 = \frac{5}{80}$ e il grafico dal punto di vista del quarto vertice è



La risposta al problema è quindi $\frac{26}{80} = 0,325$.
La risposta è 3250.