Gara di Matematica a Squadre

Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre. Si ricorda anche che occorre sempre e comunque compilare tutte le 4 cifre, eventualmente aggiungendo degli zeri iniziali.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera.
- Si ricorda che
  1. la *parte intera* di un numero reale x è il più grande intero minore o uguale ad x; si scrive $\lfloor x \rfloor$—ad esempio $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor 10 \rfloor = 10$, $\lfloor \sqrt{17} \rfloor = 4$;
  2. il *fattoriale* del numero intero n è il prodotto di tutti i numeri interi da 1 fino a n; si scrive $n!$—ad esempio $1! = 1$, $5! = 120$, $6! = 720$;
  3. un *quadrato perfetto* è un numero intero che è quadrato di un numero intero—ad esempio 16 è un quadrato perfetto, 22 non è un quadrato perfetto;
  4. una lista è *palindroma* se, letta da destra a sinistra, produce la stessa lista—ad esempio `radar` è palindroma; `drone` non è palindroma; 2020 non è palindromo; 2002 è palindromo.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142 \qquad \sqrt{3} = 1{,}7321 \qquad \sqrt{5} = 2{,}2361 \qquad \sqrt{7} = 2{,}6458$$
$$\sqrt{11} = 3{,}3166 \qquad \sqrt{13} = 3{,}6055 \qquad \sqrt{17} = 4{,}1231 \qquad \pi = 3{,}1416.$$

Scadenze importanti

- **15 minuti dall'inizio**: termine ultimo per la scelta del problema Jolly (dopo verrà assegnato d'ufficio il primo problema della lista).
- **30 minuti dall'inizio**: termine ultimo per fare domande sul testo.
- **100 minuti dall'inizio**: termine dell'incremento dei punteggi dei problemi.
- **120 minuti dall'inizio**: termine della gara.

Fake News Today

Un giornale VERO

Gli scienziati sono tutti imbroglioni! Il loro strumento principale è la matematica che si dichiara da sola contraddittoria e nessuno ce lo dice! Nella realtà non c'è niente certo al 100%. Come fanno i teoremi a essere verità inconfutabili? Nelle loro stesse ammissioni un fatto con probabilità del 30% è possibile. E un fatto con probabilità del 99% è praticamente certo. Applicando la loro definizione ***aristotelica*** di essere razionale potrebbero dimostrare che un fatto che è praticamente certo di essere praticamente certo è praticamente certo. Ma non lo fanno! Gli stessi matematici spiegherebbero con i loro calcoli che un tale fatto ha probabilità 98%! Basta continuare a ripetere e ripetere stolidamente—proprio come i matematici ***non*** fanno—la frase precedente per scoprire che un fatto possibile è praticamernte certo. Questo giornale si basa su questa constatazione—che quelli come noi che non si lasciano bullizzare dalla scienza conoscevano prima che i matematici ce lo nascondessero! **BUONA LETTURA!**

Università di Genova

11 marzo 2022

Gara a Squadre – Testi dei problemi[1]

{1} SOLO CALCOLI

di Carlo Càssola

Qual è il valore di

$$\frac{2022!}{2022! - 2021! - 2020!}?$$

Non c'è che fare i calcoli. (Si veda il punto 2 delle **Istruzioni generali** per la definizione di fattoriale di un numero intero positivo.)

[*Dare come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*]

{2} CIFRE

di Lorenzo Mazza

Si considerino le sequenze finite $(a_n)_{n=0,\ldots,k}$ di numeri naturali di tre cifre tali che

$$a_{n+1} = a_n + \max C(a_n)$$

dove $C(a_n)$ è l'insieme delle cifre che compaiono in a_n—un esempio di tale sequenza è $(143, 147, 154, 159)$.
Tra tutte queste sequenze si considerino quelle composte soltanto da numeri dispari e, di ciascuna di queste, si consideri la somma dei termini che la compongono $\sum_{n=0}^{k} a_n$. Qual è la somma massima che si trova?
Il problema è facile, ma ci si può chiedere a che cosa serve farlo.

{3} DISCHI

di Carlo Càssola

In un quadrato $ABCD$ sono state tracciate internamente la semicirconferenza di diametro AD e la semicirconferenza che ha diametro sul lato CD, ha uno degli estremi del diametro in C ed è tangente all'altra semicirconferenza. Qual è il rapporto, moltiplicato per 100, tra l'area della semicirconferenza più grande e l'altra?
Per confrontarle basta ritagliare i due dischi.

{4} L'ETÀ DI RUGGERO

di Carlo Càssola

L'anno prossimo, nel giorno del suo compleanno, l'età di Ruggero diventerà la somma delle cifre dell'anno in cui è nato. Quali sono gli anni in cui può essere nato Ruggero?
È facile rendersi conto che il plurale è fuorviante.

[*Dare come risposta la somma degli anni ammissibili.*]

{5} CENTRO!

di Cecilia Oliveri

Siano date due circonferenze concentriche: una di raggio 20 cm; l'altra di raggio 40 cm. Siano r e s due rette tangenti alla circonferenza interna rispettivamente nei punti A e B e incidenti tra loro nel punto C appartenente alla circonferenza esterna. Siano detti E e F i punti di intersezione della circonferenza esterna rispettivamente con r e con s. Quanto vale l'area del quadrilatero $ABFE$?
Si può misurare l'area con un righello senza fare calcoli.

[1] In ogni problema, a fianco del titolo, compare il nome dell'autore.

{6} DI SEGUITO

di Lorenzo Mazza

Consideriamo un intero positivo $a > 1$. Scriviamo due volte di seguito il numero a ottenendo un numero b—cioè, supponendo che a sia un numero con ℓ cifre, in altre parole è $10^{\ell-1} \le a < 10^{\ell}$, il numero b è $a + a10^{\ell}$. Qual è il più piccolo valore di a tale che $b = ka^2$ per un opportuno k intero positivo?

{7} VACCINI

di Giuseppe Rosolini

Si consideri che 1 italiano su 9 non è vaccinato per Covid-19 e le probabilità di contrarre il Covid-19 sono 0,1 per un vaccinato e 0,9 per un non-vaccinato. Qual è la probabilità che un italiano malato abbia contratto la malattia da non-vaccinato?
È inspiegabile come solo cifre 1 e 9 siano coinvolte in questa osservazione; sarà per forza perché è Covid-19.

[*Dare come risposta le prime quattro cifre decimali della probabilità.*]

{8} GEMELLI

di Silvia Sconza

In un campeggio tutti gli iscritti sono gemelli tranne 40, tutti gli iscritti sono trigemini tranne 41, e tutti gli iscritti sono quadrigemini tranne 42. Quanti sono, come minimo, gli iscritti al campeggio?
Basta contarli tutti insieme.

{9} DIVISORI

di Lorenzo Mazza

Si considerino i numeri interi da 94 a 188, estremi inclusi. Per ciascuno di essi, si prenda il più grande divisore dispari. Qual è la somma di tutti questi divisori?

{10} QUINTE POTENZE

di Carlo Càssola

Presi due numeri reali r e s tali che $r + s = 1$ e $r^4 + s^4 = 7$, che numero è $r^5 + 5rs + s^5$?
Il problema è scritto su due righe e due colonne.

{11} PIEDE

di Silvia Sconza

Un gioco tra due giocatori prevede l'uso di un dado regolare a sei facce e di una moneta non truccata. A turno ciascuno dei due giocatori deve lanciare il dado: se esce un numero pari, deve lanciare il dado di nuovo; se esce 1 oppure 5 passa il turno all'avversario; se esce 3 deve lanciare la moneta. Se l'esito del lancio della moneta è testa, vince, altrimenti passa il turno all'avversario.
Ogni volta che un giocatore comincia il proprio turno deve iniziare sempre dal lancio del dado.
Qual è la probabilità che il giocatore che gioca per secondo vinca?
Questo gioco con i dadi non prenderà mai piede.

[*Dare come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*]

{12} DIVISIONE

di Silvia Sconza

Qual è il minimo numero di interi positivi consecutivi il cui prodotto è sempre divisibile per 2022?
La soluzione è immediata grazie ai criteri di divisibilità.

{13} PIRAMIDI

di Cecilia Oliveri

All'interno di un cilindro di altezza h e raggio di base r, stanno due piramidi rette con base coincidente. I vertici delle due piramidi toccano ciascuna una diversa base del cilindro nel suo centro. La base delle due piramidi è un triangolo equilatero i cui vertici toccano tutti la superficie laterale del cilindro. Sapendo che il prodotto $rh = 100$ e che r e h assumono solo valori interi, quanto vale la differenza tra il volume massimo e il volume minimo occupato dalle due piramidi?

{14} CORTO

di Lorenzo Mazza

In quanti modi il numero 2022 può essere scritto come somma di due o più interi positivi posti in ordine non decrescente ed in modo tale che la differenza fra l'ultimo e il primo termine sia al più 1?

La risposta è più corta della domanda.

{15} LA FORMICA

di Lorenzo Mazza

Su un parallelepipedo a base quadrata di spigolo 5 cm e alto 10 cm, una formica parte da un vertice A della base quadrata e si reca inizialmente sul vertice B diametralmente opposto sull'altra base. Poi si reca al centro di quella base e da lì ritorna in A. Qual è la lunghezza minima in mm di tale tragitto?

Se la formica parlasse basterebbe chiederglielo.

{16} MASSIMO

di Silvia Sconza

Sapendo che $\dfrac{1}{4a^2} + a^2 = 8$, quanto vale al massimo $\dfrac{1}{32a^5} + a^5$?

Boh!

{17} ESILARANTE

di Carlo Càssola

In un quadrato $ABCD$ di lato 2 cm si tracci la circonferenza inscritta. Sia M il punto medio del lato BC. Il segmento MD interseca la circonferenza in un ulteriore punto K oltre al punto M. Quanto vale l'area del quadrato costruito su AK in mm^2?

I matematici gestiscono costruzioni esilaranti.

{18} LA TAVOLA ROTONDA

di Lorenzo Mazza

Intorno a una tavola rotonda sono sedute 2022 persone. Chiaccherando tra di loro, scoprono che il valore assoluto della differenza di soldi nei portafogli di due persone sedute vicine è sempre di 4€ o di 5€. Notano anche che nessuna coppia di persone possiede la stessa quantità di soldi. Qual è la massima differenza di soldi posseduti fra due persone?

{19} TERNE PERFETTE

di Giuseppe Rosolini

Una *terna pitagorica* è una tripla (a, b, c) di numeri interi positivi che verifica le seguenti condizioni

- $a^2 + b^2 = c^2$
- $a < b$

Una terna pitagorica si dice *primitiva* se non esistono una terna pitagorica (d, e, f) e un numero intero $k > 1$ tali che $a = kd$, $b = ke$, $c = kf$.

Si dimostra facilmente che esistono infinite terne pitagoriche primitive, ma si dimostra che sono in numero finito le terne pitagoriche primitive (a, b, c) tali che l'area del triangolo determinato dalla terna è un quadrato perfetto.

Quante sono tali terne pitagoriche?

(Si veda il punto 3 delle **Istruzioni generali** per la definizione di quadrato perfetto.)

{20} ANGOLI

di Lorenzo Mazza

Siano M e N rispettivamente i punti medi dei lati AB e CD di un quadrato $ABCD$. Si consideri il punto P, appartenente al prolungamento di BD dalla parte di D; sia H l'intersezione di PM con AD e K l'intersezione di HN con BD. L'ampiezza dell'angolo $\widehat{DKH}$ è $81°$. Qual è l'ampiezza dell'angolo $\widehat{PND}$?

{21} INIEZIONI SENZA SIRINGHE

di Giuseppe Rosolini

Dati insiemi A e B una *iniezione* da A a B è una funzione $f\colon A \to B$ tale che per ogni a, a' in A, se $f(a) = f(a')$, allora $a = a'$. Ad esempio la funzione $d\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ che manda un numero nel suo doppio è una iniezione da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}$; la funzione $q\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ che manda un numero nel suo quadrato non è una iniezione da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{N}$. Quante sono le coppie di numeri (m, n) con m e n compresi tra 1 e 30 (estremi inclusi) tali che il numero di iniezioni dall'insieme $\{1, 2, \ldots, n\}$ all'insieme $\{1, 2, \ldots, m\}$ è un quadrato perfetto?

Gara di matematica a squadre 2022
Soluzioni

Università di Genova

Un enorme ringraziamento va a tutti coloro che quest'anno, con la solita, pura abnegazione, insieme a Sandro Campigotto, Carlo Càssola e Lorenzo Mazza, hanno contribuito a preparare i testi di gara: Andrea Giusto, Matteo Littardi, Cecilia Oliveri, Silvia Sconza, Anna Ulivi.
Sono tutti ex-giocatori iscritti a corsi di studi presso la Scuola di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali dell'Università di Genova.

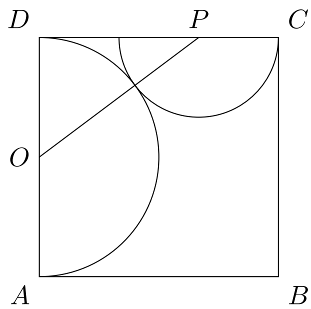
Soluzione del problema 1.

$$\begin{aligned}\frac{2022!}{2022!-2021!-2020!} &= \frac{2022!}{2020!(2022\cdot 2021-2021-1)}\\ &= \frac{2022\cdot 2021}{2021\cdot 2021-1} = \frac{2022\cdot 2021}{(2021+1)(2021-1)}\\ &= \frac{2022\cdot 2021}{2022\cdot 2020} = \frac{2021}{2020}.\end{aligned}$$

La risposta è `4041`.

Soluzione del problema 2. Affinché la sequenza sia composta da numeri dispari, la cifra massima c da sommare deve essere pari e questa non può comparire nella posizione delle unità. Inoltre dovrà essere sempre la stessa perché, se cambia, diventa $c+1$ dispari. Per massimizzare la somma, la cifra c deve comparire nella posizione principale, che è quella delle centinaia. Notato che la funzione "sommare c" è ciclica sulle unità di ordine 5, la sequenza di cinque numeri $(857, 865, 873, 881, 889)$, dove $c = 8$ per ogni termine e che ha somma 4365, non può essere estesa.
La risposta è `4365`.

Soluzione del problema 3. Sia 2ℓ il lato del quadrato. Dunque ℓ è il raggio della semicirconferenza di centro O nella figura:



Sia r il raggio della semicirconferenza di centro P. Il Teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo DPO fornisce la relazione

$$(\ell + r)^2 = \ell^2 + (2\ell - r)^2;$$

da cui si ottiene che $2\ell - 3r = 0$ e il raggio $r = \frac{2}{3}\ell$.
La risposta è `0225`.

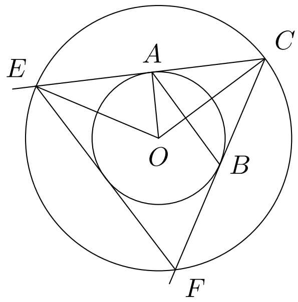
Soluzione del problema 4. La somma delle cifre di un numero minore di 2023 è al massimo 28, perciò l'età cercata è almeno 2 e della forma $a + 10b$ per a e b cifre con $b = 0, 1, 2$.

L'anno di nascita è perciò da cercare a partire dal 1995: è tale che $2023 = 1000c + 100d + 10(e + b) + (f + a)$ dove f è una cifra, in più $c = 1$, $d = 9$, $e = 9$, oppure $c = 2$, $d = 0$, $e = 0, 1$. La condizione richiesta dalla domanda si scrive come

$$a + 10b = c + d + e + f. \tag{1}$$

Nel caso $c = 1$, $d = 9$, $e = 9$, deve essere $b = 2$ perchè $f + a < 20$. Dunque $f + a = 13$, da (1) $a + 1 = f$. Perciò $a = 6$ e $f = 7$. Nel caso $c = 2$, $d = 0$, $e = 0$, deve essere $10b + a = 23 - f$, ma anche $10b + a = 2 + f$ da (1) che impongono che f non sia intero.
Nel caso $c = 2$, $d = 0$, $e = 1$, deve essere $10b + a = 13 - f$ e $10b + a = 3 + f$ che impone $f = 5$.
La risposta è `4012`.

Soluzione del problema 5. Detto O il centro delle due circonferenze il triangolo AOC è un triangolo rettangolo avente cateto minore $R = 20\,\text{cm}$ e ipotenusa $2R$;



Per il teorema di Pitagora $AC = R\sqrt{3}$. Gli angoli interni del triangolo ABC sono tutti di $60°$. Quindi ABC è equilatero, in particolare $AB = R\sqrt{3}$. I triangoli AOC e EOA sono uguali poiché sono entrambi rettangoli e due lati uguali. Quindi il triangolo ECF è equilatero e le due circonferenze sono quelle circoscritta e inscritta in ECF. I segmenti AB e EF sono paralleli; dunque il quadrilatero $ABFE$ è un trapezio isoscele, e le due basi sono una metà dell'altra. Quindi lo stesso rapporto vale per le altezze e dunque $EF = 2AB$. Il triangolo ECF ha area $3\sqrt{3}R^2$, il triangolo ABC ha area $\frac{1}{4}3\sqrt{3}R^2$. L'area del quadrilatero è $\frac{3}{4}3\sqrt{3}R^2 = \frac{9\sqrt{3}}{4}R^2 \approx 1558{,}8$.
La risposta è `1558`.

Soluzione del problema 6. Poiché $b = a(10^\ell + 1)$, si ha

$$k = \frac{b}{a^2} = \frac{a(10^\ell + 1)}{a^2} = \frac{10^\ell + 1}{a} < 10.$$

Inoltre $10^\ell + 1$ non è multiplo di 2, di 3, o di 5. Del resto il più piccolo numero $10^\ell + 1$ multiplo di 7 è 1001. Per questo si trova che $a = 143$ (e $\ell = 3$).
La risposta è `0143`.

Soluzione del problema 7. Siano $x = 0{,}1$ e $y = 0{,}9$ La probabilità che un italiano si ammali è $p(a) = \dfrac{8 \cdot x + 1 \cdot y}{9}$. La probabilità che un italiano sia non-vaccinato e si ammali è $p(u) = \dfrac{1}{9} \cdot y$. Dunque la probabilità richiesta è

$$p(u|a) = \frac{p(u)}{p(a)} = \frac{1}{8\frac{x}{y} + 1} = \frac{1}{\frac{8}{9} + 1} = \frac{9}{17} \approx 0{,}5294.$$

La risposta è `5294`.

Soluzione del problema 8. Indichiamo con s il numero degli iscritti che sono singoli, con g i gemelli, con t i trigemini, con q i quadrigemini e con n il totale degli iscritti, quindi si avrà $n = s + 2g + 3t + 4q$.
Sappiamo inoltre che $n - 2g = 40$, $n - 3t = 41$, $n - 4q = 42$ e n è almeno 42. In particolare: $2 \mid (n - 40)$, $3 \mid (n - 41)$ e $4 \mid (n - 42)$. Il più piccolo n che soddisfa le condizioni è 50.
La risposta è `0050`.

Soluzione del problema 9. Sia $A_n = \left\{k \in \mathbb{N} \,\middle|\, n < k \leq 2n\right\}$. Ogni divisore di un numero positivo k è minore o uguale a k. Presi due numeri $a, b \in A_n$ con $a < b$ che hanno lo stesso più grande divisore dispari, questi sono tali che $b \geq 2a > 2n$ che è assurdo. Questo comporta che i più grandi divisori dispari degli n elementi dell'insieme A_n sono tutti distinti e il massimo tra questi è $2n - 1 \in A_n$. Perciò l'insieme dei più grandi divisori dispari degli elementi di A_n è $\{1, 3, 5, \ldots, 2n-1\}$ e la somma di questi è n^2. L'insieme da considerare nel problema è $A_{94} \cup \{94\}$; quindi il valore cercato è $94^2 + 47 = 8883$ dato che 47 è il più grande divisore dispari di 94.
La risposta è `8883`.

Soluzione del problema 10. Dato che

$$\begin{aligned}(r+s)^4 &= r^4 + 4r^3s + 6r^2s^2 + 4rs^3 + s^4 \\ &= r^4 + s^4 + 4rs(r^2 + 2rs + s^2) - 2r^2s^2 \\ &= r^4 + s^4 + 4rs(r+s)^2 - 2r^2s^2\end{aligned}$$

Perciò $(rs)^2 - 2rs - 3 = 0$ da cui il prodotto rs è 3 oppure -1. Ma le due soluzioni dell'equazione $z^2 - z + 3 = 0$ non sono reali, mentre quelle dell'equazione $z^2 - z - 1 = 0$ sono $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Infine, dato che, per $j = 1, -1$ è $(a+jb)^5 = a^5 + 10a^3b^2 + 5ab^4 + j(5a^4b + 10a^2b^3 + b^5)$ il contributo di $r^5 + s^5$ alla somma cercata è $2(a^5 + 10a^3b^2 + 5ab^4) = 11$.
La risposta è `0006`.

Soluzione del problema 11.
Chiamiamo p la probabilità che il primo giocatore vinca, allora la risposta che cerchiamo è $1 - p$. Abbiamo quindi

$$p = \frac{1}{2}p + \frac{1}{3}(1-p) + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1-p)\right),$$

Svolgendo i conti si ottiene $p = \frac{6}{11}$, quindi $1 - p = \frac{5}{11}$.
La risposta è `0016`.

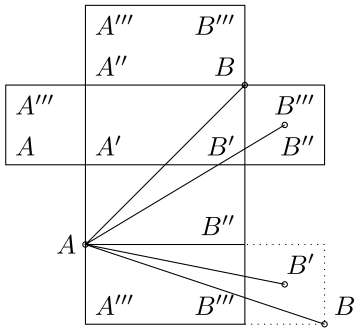
Soluzione del problema 12. La scomposizione di 2022 in fattori primi è $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$. Quindi prendendo 337 numeri consecutivi sicuramente, il prodotto sarà divisibile per 2022; effettivamente questo è il minor numero possibile poiché 336! non presenta all'interno nessun multiplo di 337.
La risposta è `00337`.

Soluzione del problema 13. Poiché la base delle due piramidi è un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza un suo lato misura $\sqrt{3}r$. Tramite il teorema di Pitagora si può ricavarne un'altezza $k = \frac{3}{2}r$ e la sua area $A_{trg} = \frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$. Detta h' l'altezza della piramide superiore, il volume da essa occupato vale $V_{sup} = \frac{A_{trg} \cdot h'}{3}$ mentre il volume occupato dalla piramide inferiore vale $V_{inf} = \frac{A_{trg} \cdot \left(h - h'\right)}{3}$. Il volume complessivo è quindi dato da $V_{tot} = \frac{A_{trg} \cdot h}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}hr^2$. Il valore massimo viene assunto quando $r = 100$ e il valore minimo quando $r = 1$, quindi la soluzione è $\frac{\sqrt{3}}{4}(100 \cdot 100 - 100) \approx 4286, 8,,,$

La risposta è `4286`.

Soluzione del problema 14. Per ogni valore fissato $1 \leq d \leq 2022$, esistono unici interi q e r tali che $2022 = dq + r$ con $0 \leq r < d$. Si può allora pensare di scrivere 2022 come somma di $(d-r)$ valori q e di r valori $(q+1)$ dato che $dq + r = q(d-r) + (q+1)r$—per $r = 0$ la somma è formata da valori uguali fra loro. Per $d = 2022$ si ha il caso in cui 2022 è scritto come somma di tutti 1. Per $d = 1$ si ha il caso in cui 2022 non viene scritto come somma di (almeno) due interi, ma corrisponde al caso $2022 = 2022$, contro l'ipotesi che chiede che 2022 debba essere scritto come somma di almeno due interi. Dunque i valori possibili sono tanti quanto $1 < d \leq 2022$, cioè 2021.
La risposta è `2021`.

Soluzione del problema 15. Conviene vedere lo sviluppo piano del parallelepipedo dove sono evidenziati i tre punti toccati dalla formica e una identificazione della base su cui sta B vengono riportate a bordo della superficie laterale:



Non è indicato il secondo tragitto da B al centro della base la cui lunghezza più breve è $2{,}5\sqrt{2}\,\text{cm}$.
Le lunghezze dei possibili primi tragitti sono $10\sqrt{2}\,\text{cm}$ e $5\sqrt{3^2+1^2}\,\text{cm} = 5\sqrt{10}\,\text{cm}$.
Le lunghezze dei possibili terzi tragitti sono $2{,}5\sqrt{5^2+3^2}\,\text{cm}$ e $2{,}5\sqrt{5^2+1^2}\,\text{cm} = 2{,}5\sqrt{26}\,\text{cm}$.
La lunghezza minima per l'intero percorso è

$$\left(10\sqrt{2} + 2{,}5\sqrt{2} + 2{,}5\sqrt{26}\right)\,\text{cm} = \left(5 + \sqrt{13}\right)\frac{5}{\sqrt{2}}\,\text{cm} \approx 304{,}2\,\text{mm}.$$

La risposta è `0304`.

Soluzione del problema 16. Si osservi innanzitutto che

$$\left(\frac{1}{2a} + a\right)^2 = a^2 + \frac{1}{4a^2} + 2\frac{1}{2a}a = 8 + 1 = 9. \tag{2}$$

Sviluppando poi la potenza quinta

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2a} + a\right)^5 &= a^5 + \frac{1}{32a^5} + 5\frac{1}{16a^4}a + 10\frac{1}{8a^3}a^2 + 10\frac{1}{4a^2}a^3 + 5\frac{1}{2a}a^4 \\ &= a^5 + \frac{1}{32a^5} + \frac{5}{2}\left(\frac{1}{8a^3} + a^3\right) + \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2a} + a\right)\end{aligned}$$

si ottiene perciò

$$a^5 + \frac{1}{32a^5} = \left(\frac{1}{2a} + a\right)^5 - \frac{5}{2}\left(\frac{1}{8a^3} + a^3\right) - \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2a} + a\right).$$

Sviluppando la potenza terza

$$\left(\frac{1}{2a} + a\right)^3 = a^3 + \frac{1}{8a^3} + 3\frac{1}{4a^2}a + 3\frac{1}{2a}a^2 = a^3 + \frac{1}{8a^3} + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2a} + a\right)$$

si ottiene anche

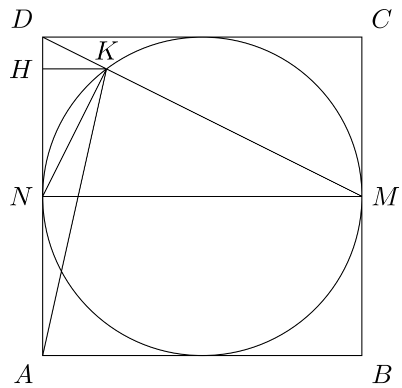
$$a^3+\frac{1}{8a^3}=\left(\frac{1}{2a}+a\right)^3-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2a}+a\right).$$

Dunque, sfruttando (2), si ottiene

$$\begin{aligned}
a^5+\frac{1}{32a^5}&=\left(\frac{1}{2a}+a\right)^5-\frac{5}{2}\left(\frac{1}{8a^3}+a^3\right)-\frac{5}{2}\left(\frac{1}{2a}+a\right)\\
&=\left(\frac{1}{2a}+a\right)^5-\frac{5}{2}\left(\frac{1}{2a}+a\right)^3+\frac{5}{4}\left(\frac{1}{2a}+a\right)\\
&=\left[\left(\frac{1}{2a}+a\right)^4-\frac{5}{2}\left(\frac{1}{2a}+a\right)^2+\frac{5}{4}\right]\left(\frac{1}{2a}+a\right)\\
&=\left[81-\frac{45}{2}+\frac{5}{4}\right]3=\frac{717}{4}\approx 179{,}25.
\end{aligned}$$

La risposta è `0179`.

Soluzione del problema 17. Sia $2\ell = 2\,\mathrm{cm}$. Siano N il punto medio di AD e H l'intersezione con AD della parallela a MN da K.



I triangoli rettangoli DNM e DHK sono simili; in ciascun triangolo un cateto è lungo il doppio dell'altro. Il segmento NK è perpendicolare a DM. Così anche il triangolo rettangolo DKN è simile a DNM. Così $DK=\frac{DN^2}{DM}=\frac{\sqrt{5}}{5}\ell$. Dunque $DH=\frac{1}{5}\ell$, $HK=\frac{2}{5}\ell$ e $AH=\frac{9}{5}\ell$. Perciò

$$AK^2=HK^2+AH^2=\left(\frac{4}{25}+\frac{81}{25}\right)\ell^2=\frac{85}{25}100\,\mathrm{mm}^2=340\,\mathrm{mm}^2$$

La risposta è `0340`.

Soluzione del problema 18. Si numerino le persone da 1 a 2022, iniziando da chi ha meno soldi e procedendo in senso antiorario. Supponiamo che la persona con più soldi sia numerata con n. Tra 1 e n ci sono $n-2$ persone in senso antiorario; del resto, tra 1 e n ci sono $2022-n$ persone in senso orario, e sia d€ la differenza dei soldi di n e quelli di 1. Dunque $d \le 5(n-1)$ e $d \le 5(2023-n)$ da cui $2d \le 5(n-1)+5(2023-n)=10110$, cioè $d \le 5055$. Il valore $d=5055$ si può ottenere solo se la differenza fra due persone vicine è esattamente 5, in particolare sia 2 che 2022 hanno gli stessi soldi che è escluso. Il valore $d=5054$ si può ottenere solo se $1009 \le n \le 1013$ e si ottiene, ad esempio per $n=1012$, con 1 con k€, 2 con $(k+4)$€, $2+i$ con $(k+4+5i)$€ per $i=1,\dots,n-2$, con $2022-j$ con $(k+5j)$€ per $j=0,\dots 2022-n$. Così 1011 ha $(k+5049)$€; 1012 ha $(k+5054)$€. Dall'altra parte $1013=2022-1009$ ha $(k+5050)$€, 2022 ha $(k+5)$€.
La risposta è `5054`.

Soluzione del problema 19. Sia (a,b,c) una terna come richiesto nel problema con area $A=\frac{ab}{2}$ minima. Perciò a e b sono primi tra loro e uno dei due deve essere pari. Questo è della forma $2rs$, l'altro è $r^2 - s^2$ per opportuni interi r e s, necessariamente primi tra loro. Dato che $A = (r+s)(r-s)rs$ è un quadrato perfetto, ciascuno dei quattro fattori è pure quadrato perfetto, con ogni coppia di radici ancora numeri relativamente primi. Poiché $r^2 - s^2$ è dispari, r e s sono uno pari e l'altro dispari. Perciò $c = \sqrt{r+s}$ e $d = \sqrt{r-s}$ sono dispari. Così $2r = c^2 - d^2$ è un multiplo di 4 in quanto differenza di quadrati dispari, e r è pure multiplo di 4 in quanto quadrato perfetto pari. Presi ora $a' = \dfrac{c-d}{2}$, $b' = \dfrac{c+d}{2}$ e $c' = \sqrt{r}$ si ha che

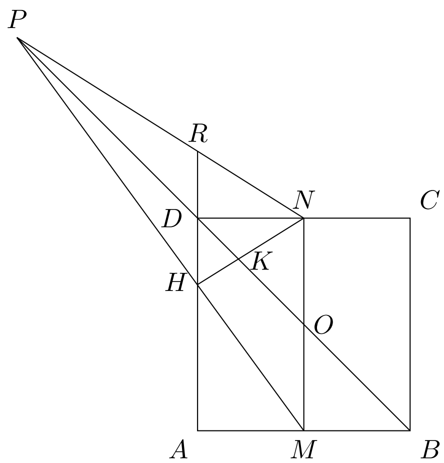
$$a'^2 + b'^2 = \frac{c^2 - d^2}{2} = c'^2 \qquad \text{e} \qquad \frac{a'b'}{2} = \frac{c^2 - d^2}{8} = \frac{r}{4} = \left(\frac{c'}{2}\right)^2.$$

Il numero $\frac{c'}{2}$ è intero dato che $c'^2 = r$ è multiplo di 4. Dunque (a', b', c') è una terna pitagorica primitiva tale chee l'area del triangolo determinato è un quadrato perfetto. Ma la sua area è

$$\frac{a'b'}{2} = \frac{r}{4} < r < \frac{2rs}{2} \le \frac{ab}{2} = A.$$

che contraddice l'ipotesi che A sia minima.
La risposta è `0000`.

Soluzione del problema 20. Nel triangolo DHK, poiché $\widehat{DHK} = 81°$ e $\widehat{KDH} = 45°$, allora $\widehat{DHK} = 180° - 81° - 45° = 54°$.



Di conseguenza, $\widehat{DNH} = 180° - 90° - 54° = 36°$. Chiamato con O il punto di intersezione fra MN e PB e con R il punto di intersezione fra PN e il prolungamento di AD, poiché MN e AR sono parallele e O è il punto medio di MN, allora D è il punto medio di RH. I triangoli RND e DNH sono uguali, pertanto $\widehat{PND} = \widehat{DNH} = 36°$.
La risposta è `0036`.

Soluzione del problema 21. Dati insiemi A e B di cardinalità m e n rispettivamente, se $n \le m$ il numero di iniezioni da A a B è $\dfrac{m!}{(m-n)!}$; altrimenti è 0. Oltre alle $\binom{30}{2} = 435$ coppie (m, n) con $m < n$, si trovano facilmente le coppie $(k^2, 1)$ per $k = 1, 2, 3, 4, 5$.
Per controllare se ce ne sono altre si nota che, se $p < q$ sono due numeri primi consecutivi, per $p \le m < q$ il rapporto $\dfrac{m!}{\ell!}$ è un quadrato perfetto solo se $p \le \ell < q$. Si vede facilmente che non ci sono altri rapporti da contare.
La risposta è `0440`.