Progetto Olimpiadi della Matematica

Unione Matematica Italiana

Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi bisogna indicare il numero intero del risultato che deve essere compreso tra 0 e 9999, o comunque una sequenza di 4 cifre, magari anche con alcuni zeri iniziali. Ad esempio, le sequenze 53, 053 e 0053 indicano la stessa risposta.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera. La ***parte intera*** di un numero reale x è il più grande intero minore od uguale ad x.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si risponda 0.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si risponda 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati: $\sqrt{2} \approx 1,4142$ $\sqrt{3} \approx 1,7321$ $\sqrt{5} \approx 2,2361$ $\pi \approx 3,1416$.

da un'idea di

Alessandro Manzoni

con suggerimenti da parte del Trio

8 giugno 2020

Gara a Squadre – Testi dei problemi[1]

1. ***Quel ramo del lago*** (Silvia Sconza)

A.M. Quel ramo del lago di Como, che volge a mezzogiorno, tra due catene non interrotte di monti…

Tira-dritto (*Rivolto a Sfregiato*) Quante sono le date tra il 1 Gennaio 1000 e il 1 Gennaio 3000 che sono palindrome, cioè tali che, scritte nel formato $\mathrm{g_1g_2/m_1m_2/a_1a_2a_3a_4}$, sia $\mathrm{g_1 = a_4}$, $\mathrm{g_2 = a_3}$, $\mathrm{m_1 = a_2}$ e $\mathrm{m_2 = a_1}$?

2. ***L'incontro*** (Sandro Campigotto)

A.M. (*Infastidito dall'interruzione*) Per una stradicciola, tornava bel bello dalla passeggiata verso casa, Don Abbondio, leggendo il suo breviario. Sulla prima pagina era riportato il numero 1; sulla seconda i numeri 1 e 2; sulla terza 1, 2 e 3… e così via. Don Abbondio pregava, ma prima eseguiva la somma di tutti numeri fin lì riportati: 1 alla prima pagina, 4 alla seconda, e via e via. Il curato, voltata la stradetta, e dirizzando, com'era solito, lo sguardo al tabernacolo, vide una cosa che non s'aspettava, proprio quando la somma che faceva divenne per la prima volta un numero di tre cifre…

Don Abbondio (*Rivolto ai bravi che contavano sulle dita*) Vedo che vi interessate di matematica. Sapete indovinare a che pagina sono arrivato?

3. ***Non s'ha da fare*** (Sandro Campigotto)

Sfregiato (*Sorpreso dalla domanda che Don Abbondio gli aveva posto*) Signor curato.

Don Abbondio Cosa comanda?

Sfregiato Lei ha intenzione, di maritar domani, Renzo Tramaglino e Lucia Mondella!

Don Abbondio (*Con voce tremolante*) Cioè… Lor signori son uomini di mondo, e sanno benissimo come vanno queste faccende. Il povero curato non c'entra: fanno i loro pasticci tra loro, e poi… e poi, vengon da noi, come s'anderebbe a un banco a riscotere. Sapete… è come se io avessi un gioiello e volessi venderlo al Monte dei Pegni. Io so che loro mi offrono i quattro quinti del valore, così io dico loro che vale un quarto di più per avere il giusto. Solo che l'ultima volta ne ho ricavato un decimo in meno del valore che avevo stimato.

Sfregiato Or bene, – questo matrimonio non s'ha da fare, né domani, né mai, e non mi cianci di alcuna frazione.

A.M. Qual era l'effettiva frazione applicata dal Monte dei Pegni?
[*Dare come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini*]

4. ***Pettegolezzi*** (Sandro Campigotto)

Perpetua Misericordia! cos'ha, signor padrone?

Don Abbondio Niente, niente.

Perpetua Che non può dir neppure a me? Chi si prenderà cura della sua salute? Chi le darà un parere?…

Don Abbondio Ohimè! Tacete, e non apparecchiate altro: datemi un bicchiere del mio vino.

Perpetua (*riempiendo il bicchiere per metà, e tenendolo poi in mano, come se non volesse darlo che in premio della confidenza che si faceva tanto aspettare*) - E lei mi vorrà sostenere che non ha niente!

Don Abbondio Date qui, date qui. (*Prende il bicchiere, con la mano non ben ferma, e lo vuota in fretta, come se fosse una medicina*)

Perpetua (*Riempiendo nuovamente il bicchiere di Don Abbondio per tre quarti*) Vuol dunque ch'io sia costretta di domandar qua e là cosa sia accaduto al mio padrone?

Don Abbondio Per amor del cielo! Non fate pettegolezzi, non fate schiamazzi: ne va… ne va la vita!

Perpetua Lei si scola una di queste bottiglie in 5 bicchieri colmi. È rimasto poco più di un litro… direi 105 cl. Vuole anche questi?

Don Abbondio Ma quanti centilitri m'ha fatto bere?

([1]) In ogni problema, a fianco del titolo, compare il nome dell'autore.

5. *Alla locanda* (Silvia Sconza)

Renzo (*A tavola con Egidio e Tonio*) Lasciate, pago io per tutti.

Egidio Grazie! Il mio conto è un terzo di quello di Tonio.

Tonio Il mio conto è un terzo del tuo, Renzo.

Renzo Ciascuno di noi tre ha ordinato quattro piatti. Ogni piatto costa un multiplo di 5 soldi, e sicuramente meno di 200 soldi. Vado a pagare per tutti: quanto posso spendere al massimo?

6. *Che barba* (Simone Traverso)

Agnese Mancano 14 giorni al tuo matrimonio; la moda oggi richiede che lo sposo abbia la barba la più lunga possibile.

Renzo (*Toccandosi le guance disperato*) Sono glabro.

Agnese Ragiona, figlio mio! La tua barba cresce di mezzo millimetro al giorno; ma, ogni volta che ti raderai a zero usando questo balsamo, la velocità di crescita dei peli diventerà $1,5$ volte quella del giorno precedente. Ma fai attenzione: non ti fare la barba più di una volta al giorno, altrimenti i follicoli si irriteranno e rovinerai tutto il lavoro fatto. Perciò oggi non fartela più.

A.M. Quanti millimetri può essere lunga al massimo la barba di Renzo il giorno del matrimonio?

7. *La pista* (Cecilia Oliveri)

Tonio Renzo, la forma della pista da ballo per il matrimonio è dettata dalla tradizione: deve essere racchiusa in un decagono di perimetro 202 m. Ogni vertice del decagono coincide con il centro di una circonferenza e le circonferenze che hanno come centro due vertici adiacenti sono tangenti. Se la circonferenza più grande ha raggio r_1, altre due hanno raggio $r_2 = \frac{1}{3}r_1$; poi due hanno raggio $r_3 = \frac{1}{3}r_2$, due altre ancora hanno raggio $r_4 = \frac{1}{3}r_3$, poi due ancora hanno raggio $r_5 = \frac{1}{3}r_4$, e l'ultima ha raggio $r_6 = \frac{1}{3}r_5$.

Renzo (*Inebetito*) Ma quanto misura r_1 in cm?

8. *Il giorno* (Sandro Campigotto)

Renzo Son venuto, signor curato, per sapere a che ora le comoda che ci troviamo in chiesa?

Don Abbondio Di che giorno volete parlare?

Renzo Come, di che giorno? non si ricorda che s'è fissato per oggi?

Don Abbondio Oggi? Oggi, oggi... abbiate pazienza, ma oggi non posso.

Renzo Oggi non può! Cos'è nato?

Don Abbondio Prima di tutto, non mi sento bene, vedete.

Renzo Mi dispiace; ma quello che ha da fare è cosa di così poco tempo, e di così poca fatica...

Don Abbondio E poi, e poi, e poi...

Renzo E poi che cosa?

Don Abbondio E poi c'è degli imbrogli. Ad esempio. Su queste carte è richiesto scrivere tutti gli anagrammi della parola "MATRIMONIO" in cui nessuna vocale è vicina ad altra vocale e nessuna consonante è vicina ad altra consonante. Mi ci vorrà del tempo.

Renzo Ma quanti sono?

Don Abbondio Non lo so... ma quando avrò finito ve lo farò sapere.

9. *Tornando dalla filanda* (Silvia Sconza)

Lucia Ora vi dirò tutto.

Agnese Parla, parla!

Renzo (*Insieme*) Parlate, parlate!

Lucia Santissima Vergine! Chi avrebbe creduto che le cose potessero arrivare a questo segno. Tornando dalla filanda, mi era passato innanzi Don Rodrigo che mi ha chiesto quale fosse il più grande numero naturale a cinque cifre tale che ogni coppia di cifre vicine formi un numero divisibile per 2, ogni terna di cifre vicine formi un numero divisibile per 3, ogni quaterna di cifre vicine formi un numero divisibile per 4, e il numero di cinque cifre sia divisibile per 5.

Agnese (*In sottofondo, Milva canta* La filanda) Gli hai risposto?

Lucia Certo! Ma gli ho detto soltanto le prime quattro cifre da sinistra del numero.

Renzo Quali sono?

10. *Ingarbugliato* (Giulia Gaggero)

Azzeccagarbugli All'avvocato bisogna raccontare le cose chiare: a noi tocca poi imbrogliarle.

Renzo Bene! A partire da $n = 1$, per ogni numero intero positivo n scrivo la differenza tra il quadrato del successivo di n e il quadrato di n. Fino a che numero n devo arrivare per trovare, tra le differenze scritte, 24 numeri primi?

Azzeccagarbugli Diavolo! Possibile che non sappiate dirle chiare le cose!

11. ***Il soffitto*** (Luca Renzi)

Tonio La cappella ha venti pareti: è un icosagono. La decorazione che ho fatto per il soffitto consiste di travi sottili a tracciare i 20 lati e le 170 diagonali.

Renzo Quanti sono i triangoli rettangoli, che le travi, o parti di esse formano e che hanno il vertice dell'angolo retto sul perimetro dell'icosagono?

12. ***La fila*** (Luca Renzi)

Agnese Vedi questi sei pacchetti in fila.

Menico Certo, zia! Sembrano tutti uguali. Vuoi che te li metta alla rinfusa?

Agnese Esatto! Voglio che decidi una permutazione dei sei pacchetti, e la ripeti per tre volte consecutive.

Menico Zia, qual è la probabilità che, dopo averli permutati tre volte con la stessa permutazione, ci sia almeno un pacchetto che sia tornato al posto che occupa ora?
[*Dare come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini*]

13. ***Non sono un robot*** (Andrea Giusto)

Fra Cristoforo è davanti al castello di Don Rodrigo. Un cartello dice: Vietato l'ingresso ai robot e ai lombardi.

Fra Cristoforo Fatemi entrare.

Bravo a guardia dell'ingresso Frate, non sai leggere.

Fra Cristoforo Certo! Io vengo da ***; non sono lombardo.

Bravo a guardia dell'ingresso Per entrare devi dimostrare di non essere un robot: rispondi alla domanda seguente. Quanti sono i polinomi $P(x)$ con coefficienti 0,1 o 2 e tali che $P(2) = 2020$?

14. ***Il volo*** (Anna Ulivi)

Griso (*A fianco di Fra Cristoforo*) Fossi libero di muovermi per la Lombardia come quegli uccelli in cielo! (*Uno stormo di uccelli forma un triangolo in cielo; si vede un'aquila che volteggia sopra allo stormo*). Sembra che l'aquila disegni una circonferenza intorno al triangolo. (*Senza curarsi del frate*) Se disegno su un foglio la forma dello stormo e il percorso dell'aquila, ottengo un triangolo ABC e una circonferenza di cui il lato AB è un diametro. La circonferenza incontra il lato AC in un punto E. Traccio una retta parallela ad AB e tangente alla circonferenza in F, chiamo X e Y le intersezioni di tale retta con AC e BC rispettivamente, e vedo che $XF = XE = 36\,\mathrm{cm}$ e $YB = 39\,\mathrm{cm}$.

A.M. Qual è l'area di ABC in cm^2?

15. ***Nel castello*** (Andrea Giusto)

Nel castello di Don Rodrigo, conte di Fuentes, Mendoza, Deferia, duca di Terranova, contestabile di Castiglia, ci sono servi, che dicono sempre la verità, e bravi, che dicono sempre il falso. Nel cortile ci sono 2020 persone, tra servi e bravi, numerate da 1 a 2020.

A.M. Siano m, n due interi positivi tali che $m + n = 2020$ e che $m, n > 1$.

Persona 1 Non c'è nessuno che dice la verità.

Persona 2 Ci sono esattamente 2 persone che dicono la verità.

Persona 3 Ci sono esattamente 3 persone che dicono la verità.

$\vdots$

Persona n Ci sono esattamente n persone che dicono la verità.

Persona $n+1$ Ci sono esattamente m persone che dicono la verità.

$\vdots$

Persona 2020 Ci sono esattamente m persone che dicono la verità.

A.M. Qual è il minimo numero possibile di persone che dicono la verità al variare di m e n?

16. ***In cammino*** (Luca Renzi)

Renzo Guarda che strana forma hanno quei covoni di fieno!

Agnese Sono fatti alla vecchia maniera: si disegna a terra un esagono regolare di area $20\,\mathrm{m}^2$; poi, all'esterno dell'esagono, per ogni lato dell'esagono si disegna un triangolo equilatero, con un lato coincidente con il lato dell'esagono.

Lucia Il poligono risultante dall'unione dell'esagono e dei sei triangoli equilateri è una stella a sei punte.

Agnese Esatto! Infine si pianta un palo alto 3 m nel centro dell'esagono. Si ottiene il covone facendo in modo che gli spigoli laterali del solido congiungano ognuno dei dodici vertici della stella alla base base con la cima del palo.

A.M. Quanto vale in m^3 il volume del covone?

17. ***A Pescarenico*** (Silvia Sconza)

Lucia A Pescarenico ci sono 3586 persone: alcune sono sincere, e dicono sempre la verità; altre sono bugiarde, e dicono sempre il falso. Renzo, è troppo pericoloso; dobbiamo scappare.

Renzo Fermiamo questi sei abitanti di Pescarenico.

Lucia Ma non sai se sono sinceri o bugiardi!

Renzo (*Rivolto a sei abitanti di Pescarenico.*) Quanti sono gli abitanti bugiardi di Pescarenico?

Primo abitante Ci sono un numero pari di bugiardi.

Secondo abitante Ci sono un numero divisibile per 3 di bugiardi.

Terzo abitante Ci sono un numero divisibile per 4 di bugiardi.

Quarto abitante Ci sono un numero divisibile per 5 di bugiardi.

Quinto abitante Ci sono un numero divisibile per 7 di bugiardi.

Sesto abitante Ci sono tanti sinceri quanti bugiardi.

Lucia Qual è il numero massimo di Pescarenicesi bugiardi compatibile con tutte le affermazioni?

Fra Cristoforo E qual è il numero minimo?

[*Dare come risposta la somma dei due numeri.*]

18. ***Progetti*** (Anna Ulivi)

L'innominato Nibbio, vorrei il tuo parere su' novi progetti per il castello. A cuore dell'idea sono tre cubi. (*Il Nibbio si preoccupa*) Si considerano solidi costruiti nel seguente modo: dato un cubo di lato 12 m, nel suo centro sta uno dei vertici di un secondo cubo uguale al primo e con i lati paralleli ai lati del primo; nel centro del cubo generato dall'intersezione dei due precedenti sta un vertice di un terzo cubo con le stesse dimensioni e con i lati paralleli agli altri due. Il castello avrà quest forma.

Nibbio Ma ci sono molti solidi determinati da questi dati. Qual è il volume massimo di un solido cosí determinato? E il volume minimo?

[*Dare come risposta la somma dei due volumi.*]

19. ***Nella locanda*** (Silvia Sconza)

Renzo Che cosa fate con quel mazzo?

Locandiere È un mazzo che comprende le 28 carte dei valori da 1 a 7 dei quattro semi: cuori, quadri, fiori, picche. Impilo sette carte sul banco una sopra all'altra in modo tale che: se c'è almeno un 7, almeno uno di essi deve avere un 6 rosso subito sotto; la carta più in alto deve essere una di valore massimo tra le presenti; non possono esserci due carte pari vicine né due carte dispari vicine; la somma delle tre carte più in alto deve essere esattamente uguale alla metà della somma delle quattro carte più in basso. Poi faccio scegliere al cliente una carta nel mazzo. Se è un asso, la bevuta è gratis.

Renzo Ma quante sono le combinazioni di 7 carte che soddisfano le richieste e tali che la carta più sotto sia di valore massimo possibile tra tutte le configurazioni ammesse?

20. ***La stella*** (Cecilia Oliveri)

Don Ferrante Disegna un ottagono regolare e costruisci al suo interno una stella a 8 punte procedendo in questo modo: scegli un vertice A; in senso orario a partire dal vertice A, indica gli altri vertici in ordine con i nomi F, C, H, E, B, G, D (*Donna Prassede esegue attentamente*); congiungi ora con un segmento ogni coppia di lettere alfabeticamente consecutive, infine traccia il segmento AH. Dimmi la misura di AB.

Donna Prassede È lungo $18,42\,\text{cm}$.

Don Ferrante Allora, quanto vale l'area dell'ottagono piccolo all'interno della stella?

21. ***A Bergamo*** (Giuseppe Rosolini)

Renzo Ci sono fattoriali che hanno scomposizioni fattoriali, ad esempio $6! = 3! \cdot 5!$. Chissà quanti sono?

Lucia Beh, il tuo esempio è un caso particolare di una situazione molto più generale: prendi k numeri interi positivi $\ell_1,\ldots,\ell_k$ e fissa $n = \ell_1! \cdot \ldots \cdot \ell_k!$. Basta usare la definizione per dimostrare che $n! = \ell_1! \cdot \ldots \cdot \ell_k! \cdot (n-1)!$ è una scomposizione con $k+1$ fattoriali.

Renzo D'accordo! Ma ci sono fattoriali $n!$, diciamo con $n < 4!$, che hanno scomposizioni fattoriali $\ell_1! \cdot \ldots \cdot \ell_k!$ dove $k > 1$ e ℓ_i è maggiore di 1 e minore di $n-1$ al variare di i da 1 a k?

[*Dare come risposta la somma di tutti i numeri ℓ_i il cui fattoriale compare in almeno uno di tali scomposizioni.*]

Soluzioni

Un enorme ringraziamento va a tutti coloro che quest'anno, con la solita, pura abnegazione, hanno contribuito a preparare i testi di gara. Insieme a Francesco Veneziano, ingaggiato in extremis e di grande aiuto, e a Sandro Campigotto, che ha anche avuto una parte fondamentale nell'organizzazione e gestione delle gare a squadre in modalità remota, sono stati l'aiuto principale: Giulia Gaggero, Andrea Giusto, Bruk Mohamed, Cecilia Oliveri, Luca Renzi, Silvia Sconza, Simone Traverso, Anna Ulivi. Sono tutti ex-giocatori che svolgono i loro studi universitari presso la Scuola di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali dell'Università di Genova.

Soluzione del problema 1. Per le condizioni imposte gli unici mesi possibili sono gennaio (01), febbraio (02), novembre (11) e dicembre (12) e, per ciascuno di tali mesi, ogni giorno del mese verifica la condizione richiesta. Le date cercate sono $31 + 29 + 30 + 31 = 121$ in quanto anche la data 29/02/2092 è ammessa perché l'anno 2092 è bisestile.
La risposta è `0121`.

Soluzione del problema 2. La somma, alla pagina p, consiste degli addendi $\binom{i+1}{2}$ per $i \le p$, cioè grazie alla definizione induttiva delle righe del Triangolo di Tartaglia si calcola come $\sum_{i=0}^{p} \binom{i+1}{2} = \binom{p+2}{3}$. Si verifica che $\binom{9}{3} = 84$ e $\binom{10}{3} = 120$.
La risposta è `0008`.

Soluzione del problema 3. Sia v un valore qualunque. Dunque Don Abbondio dichiara $d = \frac{5}{4}v$ perché il Monte dei Pegni offre, a detta di Don Abbondio, $\frac{4}{5}d$. Ma nell'esperienza dell'ultima volta Don Abbondio ha perso $\frac{1}{10}v$. Dunque il Monte dei Pegni ha effettivamente applicato una valutazione $ad = v - \frac{1}{10}v$. Perciò $a = \frac{4}{5}\frac{9}{10} = \frac{18}{25}$.
La risposta è `0043`.

Soluzione del problema 4. Sia b la capacità del bicchiere. La bottiglia tiene $5b$. Don Abbondio ha bevuto $\frac{1}{2}b + \frac{3}{4}b = \frac{5}{4}b$; nella bottiglia restano 105 cl. Perciò $5b - \frac{5}{4}b = 105\,\text{cl}$ e $b = \frac{20}{15}105\,\text{cl} = 140\,\text{cl}$. Così Don Abbondio ha bevuto 35 cl.
La risposta è `0035`.

Soluzione del problema 5. Consideriamo il massimo conto di Renzo. Poiché tutti hanno speso un numero intero di euro, allora il conto di Renzo deve essere un multiplo di 9. Ordinando quattro piatti da 195 soldi l'uno, Tonio potrebbe aver speso 780 soldi che è divisibile per 3, ma non per 9. Basta quindi togliere 15 soldi per ottenere il massimo conto di Tonio, cioè 765 soldi. Allora il conto di Renzo sarà di 85 soldi.
La risposta è `1105`.

Soluzione del problema 6. Renzo ha a disposizione $N = 14$ giorni. Ogni giorno Renzo può scegliere una tra le seguenti mosse: (A) tagliare la barba; (B) non tagliare la barba. Supponiamo che Renzo opti per (A) almeno una volta; in quel giorno azzera il risultato ottenuto con le opzioni (B) precedenti. Perciò ottiene il massimo risultato, iniziando per k giorni con l'opzione (A), poi scegliendo l'opzione (B). Si deve cercare di massimizzare il risultato di una sequenza del tipo $A_k B_{N-k}$, dove si intende che i primi k giorni Renzo opterà per (A), nei restanti $N-k$ giorni opterà per (B). Così la lunghezza della barba, il giorno del matrimonio, sarà $(N-k)(3/2)^k v_0$ con $v_0 = .5\,\text{mm}/\,\text{d}$. La derivata di una funzione interpolante è $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^x (\log_e \frac{3}{2}(N-x) - 1)$ che ha massimo per $x = 14 - \log_{\frac{3}{2}} e$. Dato che $e \approx 2.7183$ e $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2.25$, si ha che $11 \le x \le 12$. Tabulando i valori per $k = 11, 12$

k	$\frac{N-k}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^k$
11	$\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{11} = \left(\frac{3}{2}\right)^{12}$
12	$\left(\frac{3}{2}\right)^{12}$

si ottiene lo stesso risultato. La lunghezza massima che può raggiungere la barba di Renzo è

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \text{mm} = \frac{531441}{4096} \text{mm} \approx 129.7463\,\text{mm}$$

La risposta è `0129`.

Soluzione del problema 7. Si consideri un lato qualsiasi del decagono: la sua misura è la somma dei raggi delle circonferenze che hanno come centri gli estremi di quel lato. Quindi il perimetro del decagono può essere scritto in funzione dei raggi delle circonferenze come: $2 \cdot r_1 + 4 \cdot r_2 + 4 \cdot r_3 + 4 \cdot r_4 + 4 \cdot r_5 + 2 \cdot r_6 = 202$. Quindi $2 \cdot r_1 + \frac{4}{3} \cdot r_1 + \frac{4}{9} \cdot r_1 + \frac{4}{27} \cdot r_1 + \frac{4}{81} \cdot r_1 + \frac{2}{243} \cdot r_1 = 202$.
Risulta quindi $r_1 = \frac{243}{968} \cdot 202 \approx 50.7086\,\text{m}$.
La risposta è `5070`.

Soluzione del problema 8. L'anagramma richiesto può iniziare con una consonante o con una vocale, questa stabilisce la sequenza di consonanti e vocali che seguono. Gli anagrammi di MTRMN sono $\frac{5!}{2!} = 60$ e quelli di AIOIO sono $\frac{5!}{2!2!} = 30$.
La risposta è `3600`.

Soluzione del problema 9. Sia $abcde$ il numero cercato. L'ultima cifra dovrà essere 0 se voglio che $abcde$ sia divisibile per 5 e che de sia divisibile per 2; quindi il numero deve essere della forma $abcd0$. Il fatto che ab, bc e cd debbano essere divisibil per 2, comporta che b, c e d siano pari. Poiché si sta cercando il più grande numero possibile, cominciamo considerando $a = 9$. Se $b = 8$, si ha che $c = 4$ poiché abc deve essere multiplo di 3; questo comporta che $d = 0$ oppure $d = 6$, ma 9846 non è multiplo di 4 e 400 non è multiplo di 3.
Supponiamo ora $b = 6$, allora $c = 0$ oppure $c = 6$; se $c = 6$ allora $d = 0$. Il numero 96600 soddisfa tutte le condizioni.
La risposta è `9660`.

Soluzione del problema 10. Dato $n \geq 1$ intero, si scrive

$$(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1,$$

cioè l'n-esimo numero positivo dispari (iniziando da 3). Ci sono 24 numeri primi dispari minori di 100: il ventiquattresimo numero primo è 97, che è il 48-esimo numero dispari.
La risposta è `0048`.

Soluzione del problema 11. Gli angoli retti interessati dalla richiesta sono angoli alla circonferenza circoscritta al poligono regolare, quindi insistono su un diametro che congiunge due vertici del poligono. Tali diametri sono 10. Per contarli, si fissi un tale diametro AB, si tracci il diametro perpendicolare ad esso e si considerino i quattro vertici dell'icosagono che sono nel primo quadrante: a partire dal vertice A sul diametro, siano questi in ordine C, D, E e F. Per ciascuno di questi vertici, conteremo i triangoli rettangoli formati dalle travi con angolo retto nel vertice stesso, andando in senso antiorario a partire dal primo vertice dell'icosagono non sul diametro. Questi sono formati da due rette perpendicolari che congiungono il vertice considerato con i due vertici A e B che stanno sul diametro—ciascuna retta contiene una diagonale o un lato dell'icosagono—; l'ipotenusa del triangolo è (una parte di) un'altra diagonale che attraversa le due rette perpendicolari.
Per il primo vertice C, ci sono i triangoli generati da ciascuna delle 9 diagonali che escono dal vertice A verso un altro vertice nel semicerchio ACB: determinano l'ipotenusa di un altro triangolo—il più grande tra questi è il triangolo ACB.
Per il secondo vertice D, ci sono 8 diagonali che escono da A e 8 diagonali che escono da C; ciascuna, attraversando il semipiano ADB (che è anche il sempiano ACB), determina l'ipotenusa di un triangolo.
Per il terzo vertice E, ci sono 7 diagonali che escono da A, 7 diagonali che escono da C e 7 diagonali che escono da D; ciascuna attraversa il semipiano AEB.
Per il quarto vertice F, ci sono 6 diagonali che escono da A, 6 diagonali che escono da C, 6 diagonali che escono da D e 6 diagonali che escono da E; ciascuna attraversa il sempiano AFB.
C'è poi il vertice G a metà dell'arco ACB: sulle diagonali AG e GB si tagliano 5 ipotenuse per ogni vertice A, C, D, E e F.

In totale i triangoli determinati sono $((9 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 6) \cdot 2 + 5 \times 5) \cdot 2 \cdot 10 = 3300$.
La risposta è `3300`.

Soluzione del problema 12. Si numerino i pacchetti da 1 a 6. Ogni permutazione di sei elementi si scrive come prodotto di cicli. Tali cicli possono essere di lunghezza i con $0 \leq i \leq 6$. Perché un pacchetto torni al suo posto dopo 3 azioni della stessa permutazione, è necessario che tale permutazione contenga un ciclo di lunghezza c tale che $c \div 3$. Le permutazioni che non realizzano questo devono essere composte soltanto da cicli di lunghezza 2, 4, 5 o 6; si ottengono trovando i modi in cui 6 si può scrivere come somma soltanto di tali numeri che sono $2 + 2 + 2$, $2 + 4$ e 6. Ce ne sono 5! con un singolo ciclo di 6 pacchetti. Per ogni insieme di 4 pacchetti, ci sono 3! permutazioni con un ciclo su quell'insieme di 4 pacchetti e un ciclo sul complementare: gli insiemi di 4 pacchetti sono $\binom{6}{4} = 15$. Infine per ogni coppia di insiemi disgiunti di 2 pacchetti, basta considerare quale pacchetto è accoppiato con il pacchetto 1 tra i 5 possibili e quale pacchetto è accoppiato con quello con numero minore ancora disponibile in 3 modi possibili: in totale sono 15 permutazioni. Le permutazioni che, eseguite tre volte, non hanno un punto fisso sono $5! + 3! \cdot 15 + 15 = 225$. Le permutazioni che hanno almeno un punto fisso eseguite tre volte sono $720 - 225 = 495$. Perciò la probabilità è $\frac{495}{720} = \frac{11}{16}$.
La risposta è `0027`.

Soluzione del problema 13. È utile scrivere il numero 2020 in base 2. Si noti che, se i coefficienti fossero solo 0 e 1, cioè il polinomio P dà le scritture di 2020 con potenze di 2, P sarebbe unico: 2020 in base 2 si scrive 11111100100. A questo punto bisogna solo contare i modi in cui si possono modificare le cifre della scrittura in base 2 di 2020 usando anche la "cifra" 2: se una cifra 1 o 2 è seguita da una cifra 0, si può trasformare una cifra 1 in 0 scrivendo a destra una cifra 2, e trasformare una cifra 2 in 1 scrivendo a destra una cifra 2. Perciò, considerando scritture in base 2 con cifre 0, 1 e 2 si ha che $10 = 02$ e $20 = 12$. Perciò $100 = 020 = 012$ e $1000 = 0200 = 0120 = 0112$. Basta ora contare le riscritture di 11111100 che sono $2 \cdot 6 = 12$ e le riscritture di 111111000 che sono $3 \cdot 6 = 18$. In totale sono $1 + 12 + 2 + 2 \cdot 18 = 51$.
La risposta è `0051`.

Soluzione del problema 14. Sia P il punto medio di AB, centro della circonferenza. Si consideri l'altra tangente nel punto D alla circonferenza da X; si ha che $XD = XF$. Dunque $D = E = A$ e il triangolo XAF è isoscele e retto in X e coincide con il triangolo EFP Si ha dunque che $AB = 72cm$ e $XY = 72\,\mathrm{cm} - \sqrt{(39\,\mathrm{cm})^2 - (36\,\mathrm{cm})^2} = 57\,\mathrm{cm}$. Per il teorema di Talete $\dfrac{XY}{AB} = \dfrac{CX}{CA} = \dfrac{CA - XE}{CA}$; dunque $CA = \dfrac{72 \cdot 36}{15}$ cm. L'area del triangolo è $\dfrac{72 \cdot 36 \cdot 72}{15 \cdot 2}\,\mathrm{cm}^2 = 6220.8\,\mathrm{cm}^2$.
La risposta è `6220`.

Soluzione del problema 15. La persona 1 mente; di conseguenza c'è almeno una persona, diversa da 1, che dice la verità. In secondo luogo si deve notare che le ultime m persone mentono tutte o dicono tutte il vero, mentre tra le prime n ve n'è al più una che dice il vero. Se una delle prime n persone dicesse la verità, mettiamo la persona k, necessariamente tutte le altre mentirebbero; se fosse l'unica mentirebbe a sua volta dato che $k \neq 1$, mentre se $k = m$ vi sono $m + 1$ persone a dire che le persone che dicono il vero sono m, assurdo. Perciò l'unica possibilità è che le prime n mentano tutte e che le ultime m dicano la verità. Poiché $m > 1$ si ha che $n < m$, altrimenti anche la persona numero m direbbe la stessa cosa, e sarebbero $m + 1$. Il numero di persone che dice la verità è quindi esattamente m, il cui minimo valore accettabile è 1011 dato che $n < m$.
La risposta è `1011`.

Soluzione del problema 16. La base a stella è composta da 12 triangoli equilateri, ciascuno di area $\frac{20}{6}\,\mathrm{m}^2$. Il volume del covone è $\dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{20}{6}\,\mathrm{m}^2 \cdot 12 \cdot 3\,\mathrm{m} = 40\,\mathrm{m}^3$.
La risposta è `0040`.

Soluzione del problema 17. Nel caso che il sesto dica il vero, ci sono 1793 bugiardi che sono massimo e minimo. Nel caso che il sesto dica il falso, il numero massimo possibile di bugiardi non può essere 3586 poiché è un numero pari, quindi almeno il primo sarebbe sincero; non può essere 3585, poiché è un numero divisibile sia per 3 che per 5, quindi ci sarebbero almeno due sinceri che sono il secondo e il quarto; non può essere 3584 poiché è un numero multiplo sia di

2 che di 4 che di 7, quindi ci sarebbero almeno tre sinceri che sono il primo, il terzo e il quinto. Il più grande possibile è 3583 che è primo e determina tutti i sei abitanti bugiardi. Per quanto riguarda il minimo numero di bugiardi possibile nel caso che il sesto dica il falso, tale numero è maggiore di 1 poiché 1 non è multiplo di 2, quindi sicuramente ci sono almeno due bugiardi che sono il primo e il sesto; è maggiore di 2 poiché 2 non è multiplo né di 3 né di 4, quindi ci sono sicuramente almeno tre bugiardi che sono il secondo, il terzo e il sesto; è maggiore di 3 poiché 3 non è multiplo né di 2 né di 4 né di 5, quindi ci sono sicuramente almeno quattro bugiardi che sono il primo, il terzo, il quarto e il sesto. Il minor numero possibile di bugiardi è 4, e tali bugiardi sarebbero proprio il secondo, il quarto, il quinto e il sesto.
La risposta è `3587`.

Soluzione del problema 18. Sia $l = 12\,\mathrm{m}$. Si noti prima di tutto che la posizione reciproca tra i primi due cubi è unica a meno di rotazioni. Le posizioni del terzo cubo rispetto agli altri due sono due, a meno di simmetrie e rotazioni. I due volumi si calcolano usando il metodo di inclusione-esclusione: il volume del solido composto può essere visto come $V_t = 3l^3 - V_{1,2} - V_{2,3} - V_{1,3} + V_{1,2,3}$ dove $V_{i,j}$ è il volume dell'intersezione dell'i-esimo cubo e del j-esimo cubo e $V_{1,2,3}$ è il volume dell'intersezione dei tre cubi. Quindi per il minimo è

$$V_m = 3l^3 - \frac{1}{8}l^3 - \frac{27}{64}l^3 - \frac{1}{64}l^3 + \frac{1}{64}l^3 = \frac{157}{64}l^3$$

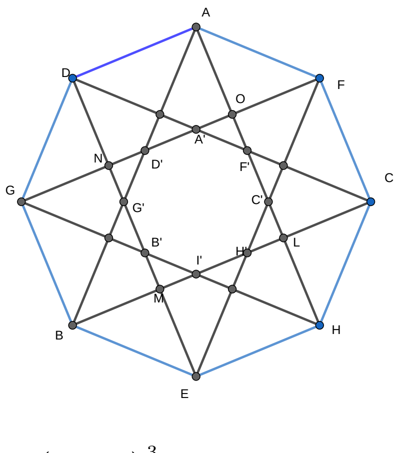
mentre per il massimo

$$V_M = 3l^3 - \frac{1}{8}l^3 - \frac{9}{64}l^3 - \frac{3}{64}l^3 + \frac{1}{64}l^3 = \frac{173}{64}l^3.$$

La somma richiesta è $V_m + V_M = \dfrac{157+173}{64}l^3 = \dfrac{330}{64}\ell^3 = 330 \cdot 27 = 8910$.
La risposta è `8910`.

Soluzione del problema 19. Supponiamo che la carta più bassa sia un 7, allora per la seconda condizione anche la carta più alta deve essere un 7. La terza condizione impone che le 7 carte seguiranno la sequenza: dispari-pari-dispari-pari-dispari-pari-dispari. Dunque sia la somma delle quattro carte sotto che la somma delle tre sopra sono numeri pari. Si noti che la somma delle quattro carte può essere: 26, 24, 22, 20, 18, 16, 14 o 12. Per la quarta condizione si escludono 26, 22, 18 e 14 perché la loro metà è un numero dispari. La somma non può essere 12 poiché la sua metà è un numero minore di 7; non può essere 16 poiché la metà è 8 e $8 < 7 + 2n + (2m + 1)$ con $n, m > 0$. Non può essere 20 poiché 10 si ottiene soltanto con la sequenza $1 - 2 - 7$, e la prima condizione dovrebbe essere rispettata nelle quattro carte sotto; ma $20 < 7 + 6 + 7 + 2n$ con $n > 0$. Ne segue che l'unico caso possibile è che la somma delle quattro carte sotto sia 24. Per ottenere 12 con le tre carte sopra ci sono due possibilità: $1-4-7$ oppure $2-3-7$. Mentre per ottenere 24 con le prime quattro carte in modo che valga anche la prima condizione bisogna necessariamente avere $7-6-7-4$. Quindi le combinazioni possibili sono solo due: $7-6-7-4-1-4-7$ e $7-6-7-4-3-2-7$. Facendo variare i semi tra quelli possibili, e ricordandosi che il 6 deve essere rosso, per la prima serie di carte ci sono 2304 combinazioni, per la seconda 3072 combinazioni. In totale danno 5376 combinazioni.
La risposta è `5376`.

Soluzione del problema 20. Per costruzione le punte della stella sono tutti angoli di 45 gradi. Sia ℓ la lunghezza del lato dell'ottagono. Dato che AOF è rettangolo isoscele, $AO = \dfrac{\ell}{\sqrt{2}}$; dunque $AB = \dfrac{2\ell}{\sqrt{2}} + \ell = (\sqrt{2}+1)\ell$. Inoltre, dato che $LC = LF'$, si ha che $OF' = FC - LF' = FC - LC = \ell - \dfrac{\ell}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\ell$. L'area dell'ottagono si ottiene sottaendo all'area del quadrato $LMNO$ l'area dei quattro triangoli $A'F'O$, $C'H'L$, $B'I'M$ e $D'G'N$. Sia $AB = a$, perciò $\ell = \dfrac{a}{\sqrt{2}+1} = a\left(\sqrt{2}-1\right)$ e l'area risulta



$$\ell^2 - 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)^2 \ell^2 = 2\ell^2\left(\sqrt{2}-1\right) = 2a^2\left(\sqrt{2}-1\right)^3 \approx 48.2261.$$

La risposta è 0048.

Soluzione del problema 21. Sia $n! = \ell_1! \cdot \ldots \cdot \ell_k!$ una scomposizione fattoriale e sia p il massimo primo minore o uguale di n. Allora uno degli ℓ_k è maggiore o uguale a p. Ne segue che $n!$ non può avere una scomposizione fattoriale quando n è primo. E, se n è il succesivo di un numero primo, allora $n!$ può avere una scomposizione fattoriale soltanto se n è un fattoriale, diciamo $n = k!$, cioè $n! = k! \cdot (n-1)!$ che non è uno dei casi cercati. Perciò restano soltano da testare i fattoriali dei numeri 9, 10, 15, 16, 21 e 22. Si scarta 15 perché in una scomposizione dovrebbe comparire 13! e $14 \cdot 15$ è un multiplo di 7! minore di 7!. Si scartano 21 e 22 con argomentazioni simili. Per gli altri tre numeri si trova che $\frac{9!}{7!} = 3! \cdot 3! \cdot 2!$ induce l'unica scomposizione possibile di 9!. Si trova che $\frac{10!}{7!} = 6!$, così, dato che $6! = 3! \cdot 5!$, si determinao due scomposizioni fattoriali ammissibili di 10!. Infine $\frac{16!}{13!} = 14 \cdot 5! \cdot 2!$ che produce una scomposizione fattoriale di 16!. Riassumendo ci sono quattro soluzioni

$$9! = 7! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 2! \qquad 10! = 7! \cdot 6! \qquad 10! = 7! \cdot 5! \cdot 3! \qquad 16! = 14! \cdot 5! \cdot 2!$$

La risposta è 0037.