Soluzioni

Un enorme ringraziamento va a tutti coloro che quest'anno, con la solita, pura abnegazione, hanno contribuito a preparare i testi di gara, in particolare: Sandro Campigotto, Andrea Damonte, Veronica Grieco, Simone Muselli, Lorenzo Pollani, Damiano Poletti, Edi Rosset, Alberto Saracco, Edoardo Scarabelli, Silvia Sconza, Simone Traverso.

Soluzione del problema 1. Dato un numero x maggiore di 2, i casi sono due: è pari o dispari. Nel primo caso il più piccolo fattore primo di x è 2, quindi al passo (iv) si otterrà $2^2 - 1 = 3$ primo. Nel secondo caso, x avrà solo fattori primi dispari, sia a il più piccolo tra questi. Ma $a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$ è un numero pari divisibile per 4. Quindi ricominciando il ciclo, si ricade nel primo caso e si ottiene nuovamente 3. Questo vale per ogni numero maggiore di 2 e risolve il problema.
La risposta è `0003`.

Soluzione del problema 2. Evidentemente ogni colonna è indipendente. Analizziamo quindi una colonna generica. Supponiamo che uno spettatore in fila `A` dica la verità. Allora in particolare quello dietro di lui mente. Dunque quello in fila `C` ha detto la verità, in contraddizione con l'affermazione dello spettatore in fila `A`. Dunque lo spettatore in fila `A` mente, così quello in fila `B` dice il vero, quindi quello in fila `C` mente, e così via... Procedendo in questo modo troviamo che la distribuzione di onesti e bugiardi in ogni colonna risulta unica: quelli nelle file dispari sono bugiardi, mentre quelli nelle file pari dicono la verità: 5 bugiardi per ogni colonna, quindi 50 bugiardi in totale.
La risposta è `0050`.

Soluzione del problema 3. Aprile e maggio sono 61 giorni consecutivi. Dunque i tre giorni della gita possono essere scelti in 59 modi diversi. Il produttore farà in modo che queste 59 triple non contengano il giorno 12 maggio, dunque quelle possibili sono $59 - 3 = 56$. Tra queste quelle incompatibili con il 21 maggio sono $56 - 3 = 53$ (nessuna di queste coinvolge il 12 maggio). Dunque la probabilità richiesta è $\dfrac{53}{56}$.
La risposta è `0109`.

Soluzione del problema 4. Sia $g(x) = f(2x)$. Così $g(0) = 0$ e

$$g(x) - g(x-1) = f(2x) - f(2(x-1)) = f(2x) - f(2x-2) = \frac{2}{5}x - 200.$$

Dunque

$$\begin{aligned} f(2018) &= g(1009) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{1009}(g(k) - g(k-1)) + g(0) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{1009}\left(\frac{2k}{5} - 200\right) \\ &= \tfrac{2}{5}\tbinom{1010}{2} - 200 \cdot 1009 = 2018. \end{aligned}$$

La risposta è `2018`.

Soluzione del problema 5. Dato che il pane è uniforme, la sua densità è costante. Ai fini della soluzione, dato che la lievitazione agisce uniformemente sull'impasto, possiamo valutare unicamente la variazione di volume a cui è sottoposto $1\,\mathrm{Kg} - 9\,\mathrm{hg} = 1\,\mathrm{hg}$ di massa iniziale della pasta, che è la quantità che rimane alla fine, cioè un decimo del volume iniziale. Ciò coincide a un decimo del suo volume iniziale. Tale volume è V_0. Dopo la n-esima lievitazione, il volume è

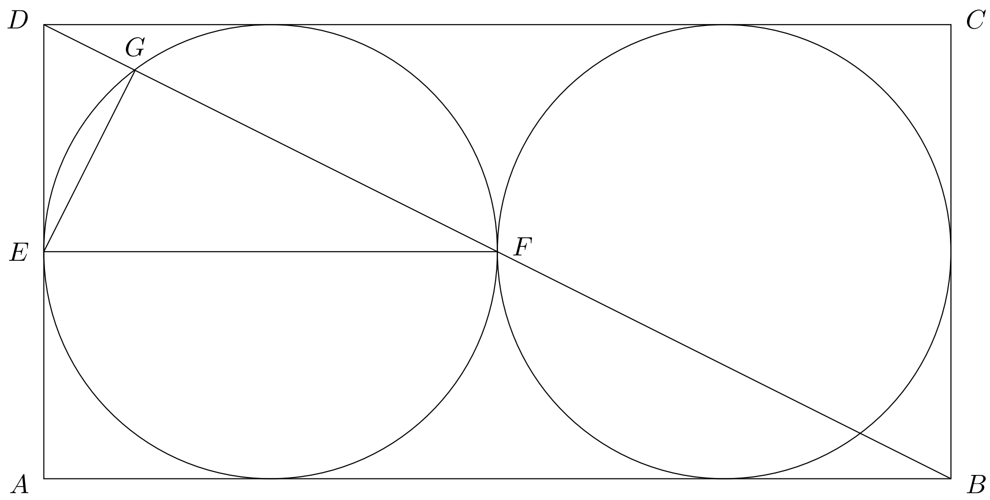
$$V_n = (1 + 1/n)V_{n-1} = \frac{n+1}{n}V_{n-1}.$$

Dunque
$$V_n = (n+1)V_0.$$
Dunque dopo la decima lievitazione il volume della pasta rimasta è $11V_0$, ovvero
$$\frac{11}{10} \cdot 1\,\mathrm{dm}^3 = 1100\,\mathrm{cm}^3$$
La risposta è `1100`.

Soluzione del problema 6. Siano x il numero di concorrenti con il cartoncino verde. Dato che qualche concorrente ha ricevuto il peperoncino, deve essere $x \geq 587$. Chi ha un cartoncino rosso, vede x concorrenti con il cartoncino verde. Chi ha il cartoncino verde, vede $x-1$ concorrenti con il cartoncino verde. Devono essere questi che hanno ricevuto la soia e $x-1 < 587$, cioè $x \leq 587$ da cui $x = 587$ e $2018 - 587 = 1431$.
La risposta è `1431`.

Soluzione del problema 7. Dato che $|s_1 - s_2| = \sqrt{(s_1 - s_2)^2}$ e
$$(s_1 - s_2)^2 = (s_1 + s_2)^2 - 4s_1s_2 = \left(\frac{153}{2}\right)^2 - 4 \cdot 1368 = \frac{1521}{4} = \left(\frac{39}{2}\right)^2$$
si devono sommare gli interi tra $\frac{39}{2}$ e $76 = \frac{152}{2}$, estremi inclusi, cioè da 20 a 76. Perciò la somma è
$$\binom{77}{2} - \binom{20}{2} = 2926 - 190 = 2736$$
La risposta è `2736`.

Soluzione del problema 8. Siano $2h = 30\,\mathrm{m}$ la lunghezza di AD e $4h$ quella di AB. Il punto F di tangenza delle due circonferenze coincide con il centro del rettangolo.



I triangoli DEF e EGF sono simili. Dunque $EF : DF = FG : EF$. Perciò
$$FG = \frac{4h^2}{h\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}h = \frac{4}{\sqrt{5}}15\,\mathrm{m} \approx 2683\,\mathrm{cm}.$$
La risposta è `2683`.

Soluzione del problema 9. Le ricette che si possono fare con s ingredienti sapidi e d ingredienti dolci sono $\binom{4}{s} \cdot \binom{3}{s} \cdot \binom{3}{d} \cdot \binom{2}{d}$. Dato che $0 \leq s \leq 3$, $0 \leq d \leq 2$ e $s + d \geq 0$, i casi da valutare sono 11:

s	d	$\binom{4}{s}\cdot\binom{3}{s}\cdot\binom{3}{d}\cdot\binom{2}{d}$
1	0	12
2	0	18
3	0	4
0	1	6
1	1	72
2	1	108
3	1	24
0	2	3
1	2	36
2	2	54
3	2	12
totale		349

La risposta è `0349`.

Soluzione del problema 10. Dato che i tre numeri devono essere diversi, fissiamo $a = 99 = 11 \cdot 3^2$, $b = 98 = 2 \cdot 7^2$ e vediamo che c si può trovare. Dato che $a \cdot b \cdot c$ è un quadrato perfetto, la fattorizzazione prima di c deve contenere almeno le copie dei fattori mancanti in $a \cdot b$: 11 e 2. Dunque si può usare un multiplo di $2 \cdot 11 = 22$ della forma $22k^2$. Si vede subito che l'unico tale multiplo è $88 = 22 \cdot 2^2$. E $\sqrt{11 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 7^2 \cdot 1 \cdot 11 \cdot 2^2} = 11 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2^2 = 924$. Migliorare il risultato evitando il fattore 99 oppure il fattore 98 è impossibile. Usando soltanto il fattore 99 è necessario utilizzare un altro fattore multiplo di 11 che non sia 88, ma questo è impossibile. Usando soltanto il fattore 98, il migliore fattore restante è $96 = 2^5 \cdot 3$, ma il fattore 3 peggiora la ricerca del terzo fattore della forma $3k^2$. Dato che 97 è primo, $95 = 5 \cdot 19$ e $94 = 2 \cdot 47$ si controlla immediatamente che il risultato non può essere migliorato.
La risposta è `0924`.

Soluzione del problema 11. Bisogna notare che $x^8 + 31x^4 + 256 = x^8 + (2^5 - 1)x^4 + 2^8$. Così

$$\begin{aligned}
x^8 + 31x^4 + 256 &= x^8 + (2^5 - 1)x^4 + 2^8 = x^8 + 2 \cdot 2^4 x^4 + 2^8 - x^4 = (x^4 + 2^4)^2 - x^4 \\
&= (x^4 + 2^4 + x^2)(x^4 + 2^4 - x^2) \\
&= (x^4 + 2 \cdot 2^2 x^2 + 2^4 - 7x^2)(x^4 + 2 \cdot 2^2 x^2 + 2^4 - 9x^2) \\
&= [(x^2 + 2^2)^2 - 7x^2][(x^2 + 2^2)^2 - 9x^2)] \\
&= \left(x^2 + 2^2 + \sqrt{7}x\right)\left(x^2 + 2^2 - \sqrt{7}x\right)\left(x^2 + 2^2 + 3x\right)\left(x^2 + 2^2 - 3x\right)
\end{aligned}$$

I valori cercati sono: $1, 4, \sqrt{7}, 1, 4, \sqrt{7}, 1, 4, 3, 1, 4, 3$. La risposta si ottiene $\frac{4^4 \cdot 3^2 \cdot 7}{100} = 161.28$.
La risposta è `0161`.

Soluzione del problema 12. Sia n il numero estratto da Ludovico. Emanuele viene eliminato se estrae due numeri x e y (necessariamente diversi) tali che $2n = x + y$. Estratto x, restano 99 possibilità per l'estrazione di y. Di queste quelle con la stessa parità sono 49. La probabilità che x e y abbiano la stessa parità e n sia la media di x e y è

$$\frac{1}{100} \cdot \frac{49}{99} = \frac{49}{9900}.$$

La risposta è `9949`.

Soluzione del problema 13. La somma delle pagine del capitolo k è $15 \cdot 7 + 14 \cdot 14(k-1) = 7 \cdot [28(k-1) + 15]$. Perciò, se x è il numero del capitolo strappato, deve essere

$$168 \cdot 337 = 53571 + 7 \cdot [28(x-1) + 15].$$

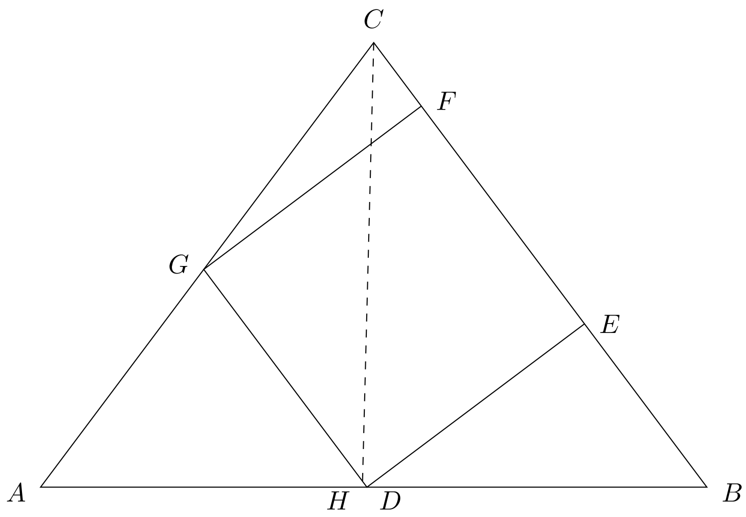
Dunque $x = 16$. La prima pagina è $15 \cdot 14 + 1 = 211$.
La risposta è `0211`.

Soluzione del problema 14. la richiesta equivale a determinare la probabilità che il numero estratto da Emanuele sia strettamente maggiore di un numero estratto dall'insieme S delle posibili somme di due numeri in C, ovvero $S = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ con l'accortezza che $\mathbb{P}(S = 5) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ perchè si può ottenere sommando 1 e 4 oppure 2 e 3—mentre per ogni altro x in S è $\mathbb{P}(S = x) = \frac{1}{6}$.
Indicando con a e b i numeri estratti rispettivamente da Emanuele e la somma estratta da Ludovico, per la formula della probabilità totale si ha che

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(a > b) &= \textstyle\sum_{k=3}^{7} \mathbb{P}(a > b \mid b = k)\mathbb{P}(b = k)\\ &= \textstyle\sum_{k=3}^{7} \mathbb{P}(a > k)\mathbb{P}(b = k)\\ &= \frac{1}{9} + \frac{5}{54} + \frac{4}{27} + \frac{1}{18} + \frac{1}{27} = \frac{24}{54} = \frac{4}{9}\end{aligned}$$

La risposta è `0013`.

Soluzione del problema 15. Siano a la lunghezza del lato obliquo, b la lunghezza della base e h la lunghezza dell'altezza CH del triangolo ABC. Dunque $a = \sqrt{h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$. Sia d la lunghezza del lato del quadrato cercato $DEFG$, sia c la lunghezza del segmento AD. I triangoli ABC e ADG sono simili così come i triangoli AHC e BEH.



Di conseguenza, $d : c = a : b$ e $(b - c) : d = a : h$, cioè

$$\begin{cases} bd - ac = 0 \\ ad + hc = hb \end{cases}$$

che, risolvendo, dà $d = \dfrac{abh}{a^2 + bh} = 120\,\text{mm} = 12\,\text{cm}$—e $c = \dfrac{bd}{a} = 144\,\text{mm}$.
La risposta è `0144`.

Soluzione del problema 16. Le radici del polinomio $q(x) := p(x) - x^2$ sono 1, 2, 3 e 4. Per il teorema di Ruffini

$$q(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4).$$

Dunque $p(5) = q(5) + 25 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 25 = 49$.
La risposta è `0049`.

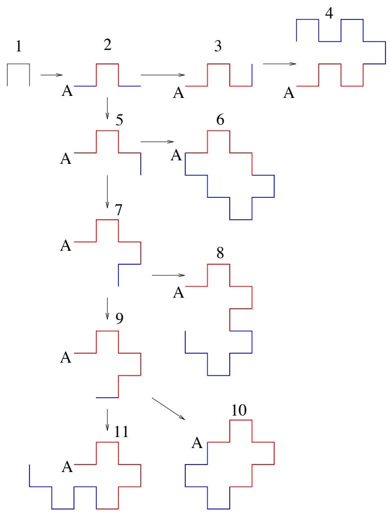
Soluzione del problema 17. Si fissi in $(0, 0)$ il punto di partenza, le uniche posizioni a 10 metri raggiungibili sono $(10, 0)$ e i relativi simmetrici negli altri tre quadranti, $(8, 6)$ e i relativi simmetrici negli altri sette ottanti.
Caso $(10, 0)$, cioè 5 spostamenti da due metri verso Est e 4 che si annullano a 2 a 2: la sequenza non ordinata di 4 spostamenti può essere NNSS, EONS oppure EEOO. Gli anagrammi di

EEEEENNSS sono $\dfrac{9!}{2!\cdot 2!\cdot 5!} = 9\cdot 2\cdot 7\cdot 6$; gli anagrammi di EEEEEEONS sono $\dfrac{9!}{6!} = 9\cdot 8\cdot 7$; gli anagrammi di EEEEEEEOO sono $\dfrac{9!}{2!\cdot 7!} = 9\cdot 4$.
Caso $(8,6)$, cioè 4 spostamenti verso Est, 3 verso Nord e una coppia di spostamenti che si annullano: la sequenza non ordinata di 2 spostamenti che si annullano può essere NS oppure EO. Gli anagrammi di EEEENNNNS sono $\dfrac{9!}{4!\cdot 4!} = 9\cdot 2\cdot 7\cdot 5$; gli anagrammi di EEEEEONNN sono $\dfrac{9!}{5!\cdot 3!} = 9\cdot 8\cdot 7$.
La probabilità richiesta è

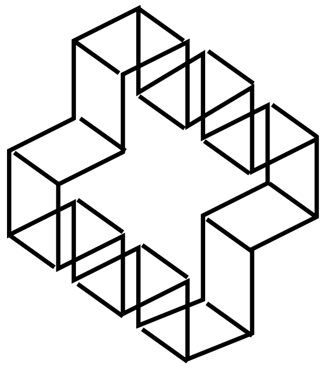
$$4\cdot\frac{9\cdot 2\cdot 7\cdot 6 + 9\cdot 8\cdot 7 + 9\cdot 4 + 2\cdot(9\cdot 2\cdot 7\cdot 5 + 9\cdot 8\cdot 7)}{4^9} =$$
$$= 4\cdot\frac{9\cdot 4\cdot 7(3+2+5+4) + 9\cdot 4}{4^9} = 4\cdot\frac{9\cdot 4(98+1)}{4^9} = \frac{891}{4^7}.$$

La risposta è `0891`.

Soluzione del problema 18. Dato che uno snodo tiene tre bastoncini in posizioni ortogonali e la dimensione minima della scatola coincide con la lunghezza dei bastoncini, una serie di bastoncini, diciamo in direzione Z, sono paralleli alla dimensione minima della scatola. Gli altri, diciamo X e Y, tra loro ortogonali e ortogonali ai bastoncini Z stanno su due piani paralleli, a distanza 10 cm, poiché la struttura è contenuta in un parallelepipedo retto. Dato che ci sono 32 snodi, ci sono 16 bastoncini X, 16 bastoncini Y e 16 bastoncini Z poiché ad ogni bastoncino corrispondono due snodi e da ogni snodo partono 3 bastoncini, uno per tipo. La figura costituita dai bastoncini X e Y su un piano è uguale alla figura ottenuta dai bastoncini X e Y sull'altro piano ed è un cammino chiuso, fatto da 8 bastoncini X e 8 bastoncini Y che si incontrano negli estremi e sono sistemati in modo alterno. Si tratta ora di capire come sono fatte queste parti di struttura. Fissiamo l'attenzione su un piano. Certamente potremmo isolare due bastoncini Y e un bastoncino X come in 1 della figura allegata (X è il bastoncino orizzontale, Y i due bastoncini verticali). Allora necessariamente dai due estremi liberi dei bastoncini Y devono partire due bastoncini X come in 2. Ora distinguiamo due casi: dall'estremo libero del bastoncino X di destra di 2 parte un bastoncino Y verso l'alto (come in 3) o verso il basso (come in 5). Nel caso 3 le scelte successive sono tutte forzate: il bastoncino successivo che si lega a Y deve andare verso destra, allora il successivo Y deve andare verso l'alto (non può andare verso il basso, perché ci siamo allontanati dal punto A con 4 bastoncini orizzontali e ora tutti i bastoncini orizzontali devono essere usati per tornare verso il punto A), il bastoncino successivo (di tipo X) deve andare verso sinistra, allora quello successivo deve andare verso l'alto e così via. Si ottiene la figura 4 che ha esaurito gli 8 bastoncini X e gli 8 bastoncini Y e non si è chiusa, quindi questa soluzione non va bene. Partiamo allora dal tratto di struttura raffigurata in 5. Il bastoncino Y di destra può essere completato in due modi: inserendo un bastoncino X che va verso destra (6) o verso sinistra (7). Nel caso 6 di nuovo le scelte sono obbligate e si ottiene una figura chiusa. Nel caso 7 il bastoncino successivo è forzato ad essere un bastoncino Y verso il basso. Poi ci sono ancora due possibili scelte, il caso 8 in cui la costruzione è obbligata e il caso 9 che ha due possibilità, una sola delle due (la 10) dà un cammino chiuso. In conclusione la possibile figura sul piano pi_1 è la 6 (o la 10, che sono uguali).



Analoga figura si deve trovare sull'altro piano; quindi la struttura è, a meno di rotazioni,



e la massima distanza tra due vertici della struttura è

$$\sqrt{400^2 + 200^2 + 100^2} = 100\sqrt{21} \approx 458.2576.$$

La risposta è `0458`.

Soluzione del problema 19. Le somme di facce opposte possono essere: 7, 8, 9, 10, 11, 12 e 13. Con somma 7 e con somma 8, le coppie di numeri possibili sono solo 3: $(1, 6)$, $(2, 5)$ e $(3, 4)$ nel primo caso; $(1, 7)$, $(2, 6)$ e $(3, 5)$ nel secondo caso. Si può sempre fare in modo che 1 sia sulla faccia inferiore e 2 sulla faccia anteriore. A questo punto ci sono 2 possibilità per il 3. Gli altri numeri sono univocamente determinati.
Con somma 9, con somma 10 e con somma 11 ci sono quattro coppie possibili: $(1, 8)$, $(2, 7)$, $(3, 6)$ e $(4, 5)$ nel primo caso; $(1, 9)$, $(2, 9)$, $(3, 7)$ e $(4, 6)$ nel secondo caso; $(2, 9)$, $(3, 9)$, $(4, 7)$ e $(5, 6)$ nel terzo caso. Si scelgono 3 coppie in 4 modi possibili, poi le disposizioni sono come in precedenza. In ciascun caso sono 8 in totale.
Con somma 12 e con somma 13 ci sono tre coppie possibili. Dunque ancora 2 possibili dadi in ciascun caso.
I dadi costruibili sono $2 + 2 + 8 + 8 + 8 + 2 + 2 = 32$.
La risposta è `0032`.

Soluzione del problema 20. Contiamo i pareggi: per pareggiare, dato che i colori sono tre, necessariamente devono estrarre lo stesso numero n di fagioli per un certo colore, diciamo rosso. Bisogna ora soltanto determinare in quanti modi ciascuno può estrarre fagioli di un altro colore, diciamo verde: $(10 - n)^2$. I casi di coppie di colori diversi sono $3 \cdot 2$. Però si sono contati tre volte i casi in cui i fagioli sono in numero uguale per tutti e tre i colori (non ci sono casi con fagioli in numero uguale per esattamente due colori): questi sono tanti quante le coppie di numeri naturali (a, b) tali che $a + b \leq 10$, cioè $\binom{11}{2}$. Perciò i pareggi sono

$$3(10^1 + 9^2 + \ldots + 1^2) - 2 \cdot \binom{11}{2} = 3\frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} - 2 \cdot \binom{11}{2} = 1155 - 110$$

Dato che i sorteggi possibili sono $\binom{11}{2}$, la probabilita' di vittoria per Ludovico è

$$\frac{1}{2}\frac{55^2 - 1045}{55^2} = \frac{55^2 - 55 \cdot 19}{55^2 \cdot 2} = \frac{18}{55}.$$

La risposta è `0073`.

Soluzione del problema 21. Per risolvere il problema bisogna considerare i vari casi possibili: il numero massimo di centri che Emanuele può aver fatto è 10, il minimo 3; Veronica può aver fatto al massimo 7 centri, al minimo 0. Si vede subito che non è possibile ottenere risultati uguali con una serie da 3 centri e una da 0, né con una serie da 4 e una serie da 1, né con una serie da 5 e una serie da 2. Per gl altri casi si preparano due tabelle:

	serie migliore	punteggio
3 centri	3	6
4 centri	4	10
5 centri	5	15
6 centri	6	21
7 centri	7	28

	serie peggiore	punteggio
6 centri	2+1+1+1+1	7
7 centri	2+2+2+1	10
8 centri	3+3+2	15
9 centri	5+4	25
10 centri	10	55

Si osserva che solo quando Emanuele fa 8 e 7 centri e Veronica rispettivamente 5 e 4, il punteggio massimo ottenuto da Veronica è maggiore o uguale a quello minimo ottenuto da Emanuele. Ciò significa che i due amici possono aver totalizzato un punteggio di 15 o 10 punti. Dunque la risposta è 1015.
La risposta è `1015`.

Soluzione del problema 22. Sia $n = a10^3 + b10^2 + c10 + d$. Si noti che (3) e (4) non possono avere lo stesso valore.
Supponiamo che (3) sia vera. Ne segue che $a+b+c+d < 9$, (2) è vera, ma inutile, (4) è falsa, (1) è vera, e la prima parte di (6) è falsa. Restano (5) e (6) che non possono essere entrambe false, altrimenti le frasi false sarebbero tante quante quelle vere. Quando (6) è vera, se (5) è vera, allora $d = 4$, $n < 2018$ e $5|n$: assurdo; se (5) è falsa, allora $d \neq 4$, $n < 2018$ e $4|n$. Quando (6) è falsa, allora $n \geq 2018$ e (5) è vera, così $d = 4$ e $4|n$. Il minimo n tra quelli che verificano una delle due possibilità è $n = 8$, il massimo è $n = 4004$.
Supponiamo che (3) sia falsa; i casi sono due: non tutte le frasi precedenti sono vere; $a + b + c + d \geq 9$. In ogni caso, (4) deve essere vera, altrimenti le frasi vere sarebbero meno di quelle false. Di conseguenza (5) e (6) devono essere vere, ma la prima condizione in (6) è falsa. Perciò, $n < 2018$ e $d = 1, 2, 3$ a seconda dei casi.
Calcolare il massimo è inutile perché è sicuramente minore di 2018, dunque minore anche di 4004. Per quanto riguarda il minimo, nel caso che $a + b + c + d \geq 9$, sarà $n > 9 > 8$; nel caso che (1) sia vera (e (2) falsa), $4|n$, $d = 2$ e $n = 12$; nel caso che (2) sia vera (e (1) falsa), $d = 1$ e $n = 11$.
La risposta è `4012`.

Soluzione del problema 23. Sia M la matrice scritta sulla torta. Sia $Q^{i,j}_{n\times n}$ il quadrato in M di dimensione n con vertice alto a sinistra in (i, j), con $1 \leq i, j \leq 9 - n$. È

$$Q^{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 2 & 3 & \ldots & n+1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n+1 & \ldots & 2n-1 \end{pmatrix} + (i + j - 2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

e $s = n^3 + (i + j - 2) \cdot n^2$. In particolare $S = 512$.

La richiesta è pertanto di trovare i quadrati Q tali che $s|512 = 2^9$. La condizione diventa $n^2(n+i+j-2)|2^9$. Perciò deve essere in particolare $n|2^4$ e $(n+i+j-2)|2^9$: i valori ammissibili per n sono $1, 2, 4, 8$; i valori ammissibili per $2 \leq i+j \leq 10-n$ sono

$n:$	1	2	4	8
$i+j:$	2	2	2	2
	3	4	6	
	5	8		
	9			

Se $k \leq 8$, i numeri tali che $i+j = k+1$ con $1 \leq i, j \leq 8$ sono k. Perciò in corrispondenza dei valori sopra si ottengono

$$1+1+1+1+2+3+5+4+7+8 = 33$$

quadrati che verificano la condizione richiesta.
La risposta è `0033`.

Soluzione del problema 24. Prima di affrontare la soluzione, è utile un'osservazione generale sulla procedura. La successione di somma delle cifre è decrescente, ovvero $a_{n+1} \leq a_n$ per ogni n; in particolare, $a_{n+1} = a_n$ se e solo se a_n è una cifra e da quel momento in poi la successione è costante, ovvero $a_m = a_n$ se $m \geq n$. Dunque, dopo un certo numero di passi a_n sarà un numero di una cifra; chiamato S il numero di fagioli nel sacchetto in quel momento, quello che ci stiamo chiedendo è quindi che esistano due interi positivi k, h tali che

$$a_n k + S = 2365h, \tag{1}$$

con a_n numero di una cifra. L'equazione ha soluzione se e solo se $\mathrm{MCD}(a_n, 2365)|S$. Scomponendo $2365 = 5 \cdot 11 \cdot 43$ si osserva che, se la cifra $a_n \neq 5$, allora $\mathrm{MCD}(a_n, 2365) = 1$; quindi l'equazione ammette soluzione. Restano perciò da considerare quegli a_1 tali che ad un certo punto la somma ripetuta delle cifre porta ad $a_n = 5$.
Iniziamo ora la soluzione valutando dopo quanti passi si ottiene un numero di una cifra. Si osservi che $a_2 \leq 36$. Se a_3 non è una cifra, sicuramente $a_4 < 5$. Perciò interessano quelle successioni con $a_3 = 5$.
Supponiamo che $a_2 = 5$. Allora $S = a_1 + 5$ e l'equazione (1) ha soluzione se e solo se $5|a_1$. Contiamo gli a_1 non divisibili per 5, cioè quegli $a_1 = A10^3 + B10^2 + C10 + D$ tali che $A + B + C + D = 5$ e D non è 0 e non è 5. Dato che $5 < 10$, gli a_1 che verificano la prima condizione sono $\binom{8}{3}$, quelli con $D = 0$ sono $\binom{7}{2}$, quelli con $D = 5$ sono soltanto il numero 5. Gli a_1 cercati sono perciò

$$\binom{8}{3} - \binom{7}{2} - 1 = 34.$$

Supponiamo che $a_2 \neq 5$. Poiché $a_3 = 5$ ed $a_2 \leq 36$, si ha $a_2 = 14, 23, 32$. Trattiamo separatamente questi tre casi assumendo che a_1 non sia multiplo di 2365, cioè $a_1 \neq 2365, 4730, 7095, 9460$. Consideriamo ancora $a_1 = ABCD$ dove A, B, C, D sono le quattro cifre del numero forse 0.
Caso $a_2 = 14$: Allora $S = a_1 + 14 + 5$ e l'equazione (1) ha soluzione se e solo se $5|a_1 + 14$. Dobbiamo contare gli a_1 con $D \neq 1$ oppure $D \neq 6$. Sia $D = 0$. Se $C = 0$ si hanno 5 casi tali che $A + B = 14$. Se $C = 1$, 6 casi tali che $A + B = 13$. Per $C = 2$, 7 casi tali che $A + B = 12$. Ci sono 10 casi tali che $A + B = 9$ quando $C = 5$, ecc. In totale per $D = 0$ si hanno

$$5+6+7+8+9+10+9+8+7+6 = 75$$

numeri con somma delle cifre 14. Anche se per ora non è richiesto calcoliamo anche il caso $D = 1$. Per lo stesso ragionamento si hanno

$$6+7+8+9+10+9+8+7+6+5 = 75 \quad \text{numeri.}$$

Si prosegue in questo modo per $D = 2$, $D = 3$ e $D = 4$ ottenendo rispettivamente 73, 69 e 63. Per $D = 5, 6, 7, 8, 9$ possiamo riusare la formula delle combinazioni con ripetizione ottenendo rispettivamente $55, 45, 36, 28, 21$. I numeri a_1 minori di 10000 con somma delle cifre 14 e con $D \neq 1$ e $D \neq 6$ sono in totale

$$75 + 73 + 69 + 63 + 55 + 36 + 28 + 21 = 420.$$

Caso $a_2 = 23$: Allora $S = a_1 + 23 + 5$ e l'equazione (1) ha soluzione se e solo se $5|a_1 + 23$. Dobbiamo contare gli a_1 con $D \neq 2$ e $D \neq 7$. Sia $\tilde{a}_1 = 9999 - a_1$ il complemento a 9 delle cifre $ABCD$: la somma delle cifre di $\tilde{a}_1$ è $36 - 23 = 13$. Quindi il problema coincide con quello di contare gli $\tilde{a}_1$ con somma 13 e con $D \neq 9 - 2 = 7$ e $D \neq 9 - 7 = 2$. Sia $D = 0$: contare i numeri con somma delle cifre 13 che finiscono per 0 è come contare i numeri che hanno somma 14 e finiscono per 1, che abbiamo già contato! E questo vale per $D = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$. Manca solo da contare $D = 9$ che però possiamo fare ancora una volta con la formula delle combinazioni con ripetizione ottenendo $\binom{6}{2} = 15$. Pertanto i numeri a_1 con somma delle cifre 23 e con $D \neq 2$ e $D \neq 7$ sono

$$75 + 73 + 63 + 55 + 45 + 36 + 21 + 15 = 383.$$

Caso $a_2 = 32$: Dobbiamo contare gli a_1 con $D \neq 3$ e $D \neq 8$. Operiamo come prima e troviamo gli $\tilde{a}_1$ con somma delle cifre 4 e $D \neq 1$ oppure $D \neq 6$. Usando la formula delle combinazioni con ripetizione si ottengono subito

$$\binom{7}{3} - \binom{5}{2} - 0 = 25 \quad \text{numeri.}$$

Togliendo da tutti i numeri quelli che abbiamo osservato non andare bene si ottiene quindi

$$9999 - 34 - 420 - 383 - 25 = 9137.$$

Però non abbiamo finito. Abbiamo infatti assunto che a_1 non fosse un multiplo di 2365. Chiaramente tutti questi numeri soddisfano la richiesta; è possibile che li abbiamo tolti? Noi infatti siamo andati subito a sommare le cifre, ma questi numeri funzionano all'inizio della procedura. Analizziamo quindi separatamente questi multipli. Se $a_1 = 2365$ allora $a_2 = 16$ e $a_3 = 7$: non è stato tolto. Se $a_1 = 4730$ allora $a_2 = 14$: questo è stato tolto! Deve essere quindi aggiunto di nuovo. Se $a_1 = 7095$, allora $a_2 = 21$ e $a_3 = 3$: non è stato tolto. Infine se $a_1 = 9460$ allora $a_2 = 19$, $a_3 = 10$ e $a_4 = 1$: non è stato tolto.
Pertanto la risposta sarà $9137 + 1 = 9138$.
La risposta è `9138`.