

Disfida Matematica 2006
Soluzione del problema 16

16 **Indicazioni enigmatiche.** Se indichiamo con x la distanza tra Valentina e Gugilelmo, le posizioni della fiaccola, di Valentina e di Guglielmo formano un tirangolo di lati $1, x, x^2$. Quindi tale triangolo è sottoposto al solito vincolo che un lato deve essere minore o uguale della somma degli altri due (dove in realtà l'uguale vale soltanto nel caso degenerare di tre punti allineati, che comunque in questo caso è permesso). Quindi si deve avere

$$\begin{cases} x \leq 1 + x^2 \\ x^2 \leq 1 + x \\ 1 \leq x + x^2. \end{cases}$$

Se ora si risolvono separatamente le tre disequazioni, si ottiene facilmente che la prima è sempre verificata, mentre le altre due danno rispettivamente

$$\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$
$$x \leq \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \quad \vee \quad x \geq \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Dunque si ricava

$$\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

che è compatibile anche col fatto che x è una distanza, e dunque è positiva. Quindi la differenza tra le distanze in km è

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = 1$$

ed espressa in metri dà la risposta 1000.